ISSN 0130-2221

КВАНТ

8
1986

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Паркеты из правильных многоугольников

«... человек, решивший посвятить себя научной работе, должен начинать ее как можно раньше — еще в студенческие, а лучше даже в школьные годы». Эти слова академика И. К. Кикоина, возглавлявшего «Квант» в течение пятнадцати лет, определяют основную цель журнала — ввести юного читателя в мир точных наук,

№ 200

помочь ему сориентироваться в нем, испытать свои силы и выявить склонности. Мы надеемся, наш журнал отвечает поставленной задаче. Сегодня вы держите в руках 200-й номер «Кванта». Этот юбилей мы отмечаем перепечаткой нескольких лучших статей из первых номеров журнала и рассчитываем, что они по-прежнему будут вам интересны и побудят к самостоятельной творческой работе.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант **8** 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

Советские ученые в борьбе за мир

Более пяти лет тому назад, 4 мая 1981 года, выдающиеся советские ученые во главе с президентом Академии наук СССР академиком А. П. Александровым и вице-президентами академиками Е. П. Велиховым и А. А. Логуновым обратились к ученым всего мира с призывом «сделать все, чтобы отвести от народов угрозу ядерной войны, ... и обратить свою волю и знания на дело созидания, на сохранение на земле условий, которые обеспечили бы достойную жизнь нынешнему и грядущим поколениям».

В этом обращении сказано также: «Мы являемся очевидцами тревожных событий: гонка вооружений, и в особенности ядерных вооружений, приобретает все больший размах. Переговоры по разоружению топчутся на месте или вообще прерваны. Подписанные договоры не вступают в силу. Действующие соглашения и договоренности, сдерживающие военную активность, подвергаются нападкам, их осуществление преднамеренно затрудняется ... Нельзя допустить, чтобы человечество оказалось в плену предрассудков, доказывающих, будто мир может покоиться только на горах оружия, будто не разум, а сила во веки веков будет править ходом истории».

Авторы обращения резко критиковали происходившую в то время в странах капитала погоню за нейтронными бомбами. Сейчас на первый план вышла борьба против размещения различных видов оружия массового уничтожения в космосе, против стратегии «звездных войн», упорно навязываемой человечеству американским империализмом.

Опасность, нависшая над человечеством, не может не тревожить ученых. Ведь они лучше людей других профессий понимают ее масштабы и последствия. И перед каждым из них встает вопрос о том, какую позицию он займет по отношению к этой опасности. Позиция советских ученых четко сформулирована в обращении. Она была активно поддержана учеными всех стран. Ее широко обсуждала и пропагандировала Всемирная федерация научных работников, добровольные объединения и союзы ученых. Их многочисленные выступления и протесты помогают мобилизации широких народных масс на активное противодействие агрессивным планам империалистов.

С каждым годом крепнет международное содружество ученых в борьбе за мирное сосуществование народов. 1986 год объявлен Организацией Объединенных Наций годом мира. Откликаясь на эту инициативу, Советский Союз выдвинул реалистическую долгосрочную комплексную программу всеобщего сокращения вооружений и разоружения, рассчитанную до 2000 года. Она изложена в Заявлении генерального секретаря ЦК КПСС М. С. Горбачева, опубликованном 15 января 1986 года, которое получило широкую международную поддержку.

Советские ученые внесли большой вклад в разоблачение авантюристических военных планов, широко рекламируемых империалистическими кругами — теории первого удара, ограниченной ядерной войны, космического противоракетного щита и т. п. Они убедительно показали, какие огромные опасности таит в себе любой международный конфликт с применением атомного оружия, опровергли рассуждения противников разоружения о невозможности строгого контроля за запрещением ядерных испытаний.

Социализм не нуждается в войнах и весь советский народ — активный противник войны.

Паркеты из правильных многоугольников

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

Что такое паркет

Самый простой, *но и* самый скучный паркет получается, если плоскость разбить на равные квадраты так, как показано на рисунке 1, *а*. Здесь два квадрата имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Паркетом будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Вероятно, вам случалось видеть паркет, составленный из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 2, *а*). Красивый паркет можно составить из правильных шестиугольников, квадратов и равносторонних треугольников (рис. 2, *б*).

Паркет производит приятное впечатление, если он достаточно симметричен. *Фигура называется симметричной, если ее можно наложить на саму себя «не тривиальным» способом (то есть не таким, когда все точки останутся на своем месте).*

Например, на рисунке 2, *б*, повернув всю сетку вершин и сторон, образующих паркет из шестиугольников, квадратов и треугольников, на 60° вокруг центра одного из шестиугольников, мы получим ту же самую сетку вершин и сторон. Центр каждого шестиугольника этого паркета является «центром симметрии шестого порядка»*).

Задача 1. Найдите все центры симметрии 4-го, 3-го и 2-го порядка паркета, изображенного на рисунке 2, *а*.

Что такое правильный паркет

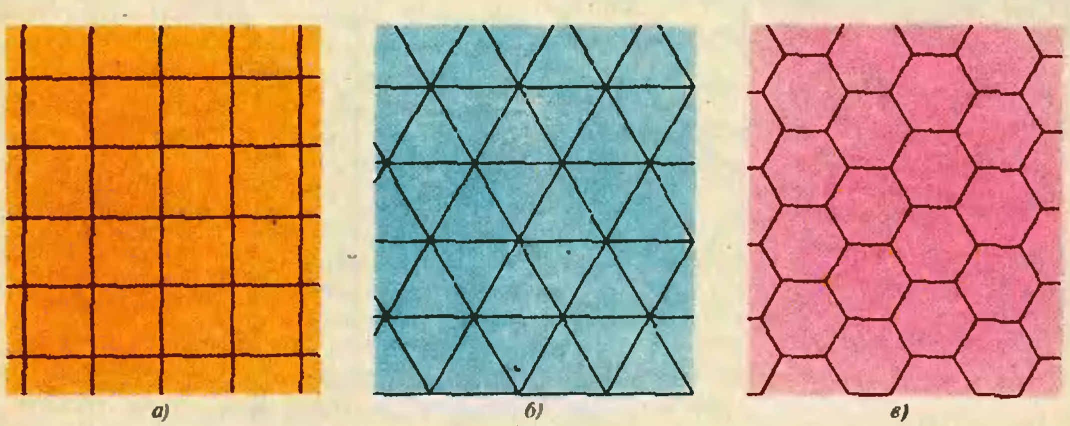
С точки зрения симметрии наше определение паркета не слишком удачно. Оно допускает паркеты, не обладающие никакой симметрией. Взяв обычный паркет из шестиугольников (рис. 1, *в*), можно «испортить» его, подразделив некоторые из шестиугольников на шесть треугольников. Легко понять, что получится вновь «паркет» в смысле нашего определения. Но можно доказать (попробуйте!), что, подразделив, например, три шестиугольника, как показано на рисунке 3, и оставив все остальные не подразделенными, мы получим паркет, совсем лишенный симметрии. Чтобы устранить некрасивые, недостаточно симметричные паркеты, мы введем такое определение:

Паркет называется правильным, если его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину.

Задача 2. Докажите, что паркеты, представленные на рисунках 1 и 2, правильны, и

Статья перепечатывается из «Кванта» № 3 за 1970 год.

*) Точка *O* называется центром симметрии *n*-го порядка некоторой фигуры, если при повороте этой фигуры вокруг *O* на 360°/*n* она наложится на саму себя.



а) б) в)

Рис. 1.

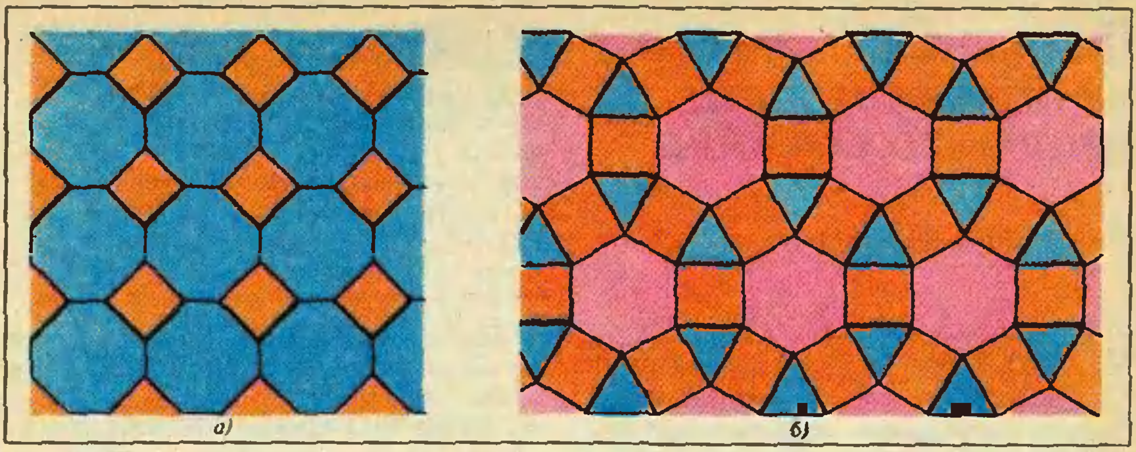


Рис. 2.

постройте самостоятельно возможно больше правильных паркетов.

Основная задача

Оказывается, что все разнообразие правильных паркетов можно описать. Если длина h стороны многоугольников паркета задана, *то существует только конечное число различных (не накладывающихся друг на друга) правильных паркетов.* Сколько именно, я не хочу вам говорить.

Перечислить их все и тем самым ответить на вопрос об их числе — это и есть основная задача, которую вам предстоит решить.

Некоторые указания

Решения задачи естественно начать с исследования устройства вершин паркета. Правильный n-угольник имеет n внешних углов (рис. 4), сумма которых равна четырем прямым углам (убедитесь в этом сами). Поэтому каждый угол правильного n-угольника равен

$$\alpha_n = 2d - \frac{4d}{n} = 2\left(1 - \frac{2}{n}\right) d.$$

В вершине паркета должны сходиться многоугольники с суммой углов, равной $4d$. Так,

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}d,\ \alpha_4 = d,\ \alpha_6 = \frac{4}{3}d,\ \alpha_8 = \frac{3}{2}d,$$

и для паркетов, изображенных на рисунках 1 и 2, имеем:

$$4\alpha_4 = 4d,$$
$$6\alpha_3 = 4d,$$
$$3\alpha_6 = 4d,$$
$$\alpha_4 + 2\alpha_8 = 4d,$$
$$\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 = 4d.$$

В общем же случае, обозначая через m_n число прилегающих к вершине n-угольников, мы должны получить

$$\Sigma m_i \alpha_i = 4d, \qquad (1)$$

где в сумму мы включаем слагаемые с теми номерами i, для которых $m_i > 0$, а $\alpha_i = 2(1 - 2/i)d$.

(Окончание см. на с. 7)

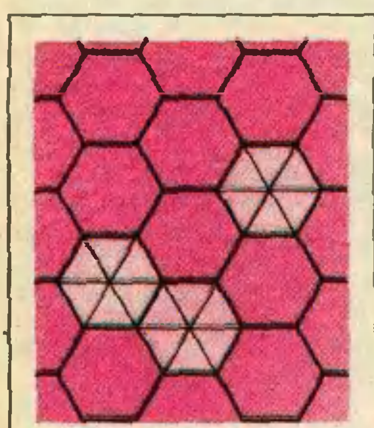


Рис. 3.

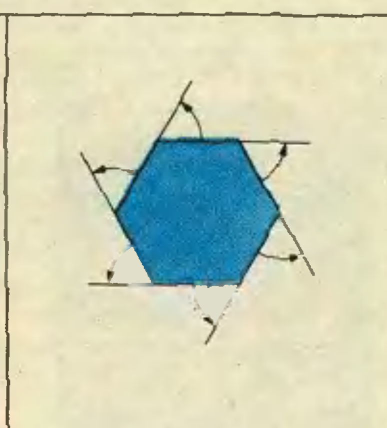


Рис. 4.

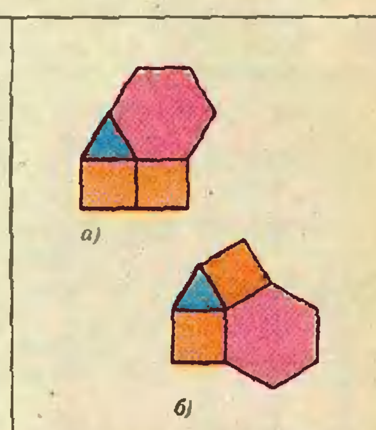


Рис. 5.

Как Декарт проводил касательные

Кандидат физико-математических наук
А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

Задача о проведении касательных — одна из важнейших задач геометрии. Этой задачей занимались еще древние греки, которым удалось в некоторых случаях успешно решить ее. В частности, они умели строить касательные к окружности, эллипсу, гиперболе, параболе... Но у них не было общего метода, и в каждом отдельном случае приходилось действовать соответствующим образом — применять то или иное свойство проводимой касательной (например, в случае окружности опирались на тот известный факт, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания).

В 1637 году вышла одна из известнейших книг в истории науки — «Геометрия» Декарта. В ней автор, наряду с другими важными результатами своего исследования, приводит и общий метод проведения касательных — так называемый *метод нормалей.* (Историки установили, что Декарт владел им еще в 1629 году.) Цель настоящей статьи — познакомить читателя с этим методом.

Начнем с понятия нормали. *Нормалью линии в данной ее точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной.* В частности (и это важно для метода Декарта), если заданная линия — окружность, то нормаль есть прямая, идущая вдоль радиуса, имеющего концом точку касания. Понятно, что если нам удастся построить нормаль, мы без труда построим и касательную. Именно так поступает Декарт: он строит сначала нормаль, а уж потом — касательную (отсюда и название его метода). Для построения нормали Декарт применяет им же разработанный метод координат, что дает ему возможность решить геометрическую задачу алгебраическим путем. (Этим, кстати, как бы еще раз подчеркивается единство математики.)

Чтобы построить нормаль в точке $P(x_0; y_0)$ к алгебраической кривой L, заданной уравнением $F(x, y)=0$ (Декарта интересовало именно построение нормали, а не вывод ее уравнения), ищется точка пересечения C $(c; 0)$ нормали с осью абсцисс. Если CP есть нормаль, то окружность с центром в точке C и радиусом CP касается данной кривой L в точке P (рис. 1); если же центр окружности будет хоть несколько смещен из C в другую точку оси абсцисс C', то окружность радиуса $C'P$ встретится с данной кривой L в соседстве с точкой P по крайней мере еще в одной точке. Таким образом, искомая окружность должна иметь с данной кривой L две или более общие точки, слившиеся в одну. Координаты точек пересечения кривой $F(x, y)=0$ и окружности $(x-c)^2+y^2=(x_0-c)^2+y_0^2$ находятся совместным решением их уравнений, для чего исключается одна из координат. При совпадении точек пересечения в P корень $x=x_0$ (или $y=y_0$) результирующего уравнения должен быть по крайней мере двойным, а это накладывает на искомую величину c определяющее ее условие.

Конечно, современному читателю метод Декарта может показаться искусственным и неэффективным. Прежде всего, уравнение касательной к аналитически заданной кривой $F(x, y)=0$ абсолютно автоматически пишется при помощи производных (правда, при этом желательно уметь дифференцировать функцию, заданную *неявно*). Но даже если и не знать производных (а Декарт их не знал), удобнее строить касательную, минуя промежуточные построения: вместо того чтобы описанным выше способом строить *окружность*, касающуюся данной кривой, можно (и даже проще) сразу построить *прямую*, касающуюся данной кривой. Для нас метод Декарта представляет, в первую очередь, исторический интерес; во вторую очередь он интересен нам (как и Декарту) тем, что позволяет поупражняться в методе координат.

Свой метод Декарт поясняет на примерах, в том числе на примере эллипса. Рассмотрим и мы этот пример.

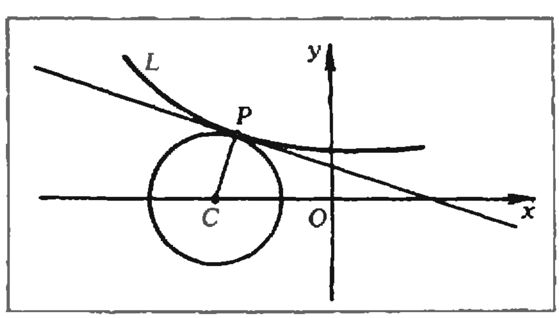


Рис. 1.

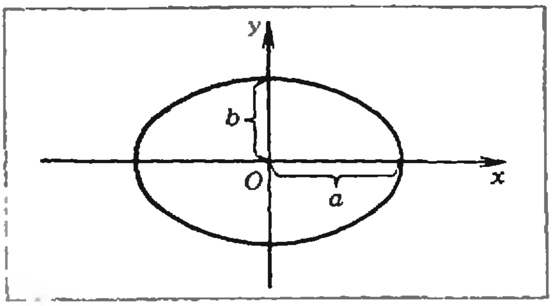


Рис. 2.

Напомним, что *эллипсом называется линия, полученная сжатием окружности к ее диаметру*. В частности, если окружность $x^2+y^2=a^2$ сжать к оси абсцисс, получится эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Здесь $b=ta$, где t — коэффициент сжатия (рис. 2).

Итак, дан эллипс (1), точка $P=(x_0;\ y_0)$ на нем, и нужно провести касательную к эллипсу в этой точке.

Возьмем окружность с центром в точке $C=(c;\ 0)$, проходящую через точку P. Ее уравнение имеет вид

$$(x-c)^2+y^2=(x_0-c)^2+y_0^2$$

(здесь c — пока неизвестный параметр), или

$$x^2+y^2-2cx-x_0^2-y_0^2+2cx_0=0. \qquad (2)$$

Параметр c следует подобрать так, чтобы окружность (2) имела с эллипсом (1) в P две слившиеся точки пересечения (рис. 3). Для этого необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0, \\ x^2+y^2-2cx-x_0^2-y_0^2+2cx_0=0 \end{cases}$$

имела решения $(x_0;\ y_0)$ и $(x_0;\ -y_0)$. (Здесь мы учитываем симметрию относительно оси абсцисс — см. рисунок 3.)

Исключив y^2, получим относительно x квадратное уравнение

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2cx-a^2(x_0^2+$$
$$+y_0^2-2cx_0-b^2)=0.$$

Так как оно должно иметь единственный корень, его дискриминант должен равняться нулю, то есть

$$a^4c^2+a^2(a^2-b^2)(x_0^2+y_0^2-2cx_0-b^2)=0.$$

Поскольку $P=(x_0;\ y_0)$ — точка эллипса, то есть

$$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2,$$

мы после несложных преобразований приходим к уравнению

$$(a^2c-(a^2-b^2)x_0)^2=0,$$

откуда $c=\dfrac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}$; центр искомой окружности найден.

Радиус CP найденной окружности лежит на нормали данного эллипса, и остается через P провести перпендикуляр к CP. Это и будет искомая касательная. Найдем ее уравнение.

Предположим, что $0<x_0<a$ и PT — отрезок касательной. Тогда из прямоугольного треугольника CPT (рис. 4)

$$PQ^2=CQ\cdot QT,$$

и так как

$$PQ=y_0,$$
$$CQ=OQ-OC=x_0-\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}=\frac{b^2x_0}{a^2},$$

получаем $QT=\dfrac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}$, так что

$$OT=OQ+QT=x_0+\frac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}=\frac{a^2}{x_0}$$

(мы снова учли тождество $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$).

Таким образом, мы нашли точку T пересечения искомой касательной с осью абсцисс: $T=(a^2/x_0;\ 0)$. (Полученный результат верен и в том случае, когда $-a<x_0<0$, проверьте это!)

Зная две точки касательной P и T, уже легко написать ее уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

где угловой коэффициент k находится из условия

$$k=\frac{y_0-0}{x_0-\dfrac{a^2}{x_0}}=\frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

(мы опять воспользовались тем, что $(x_0;\ y_0)$ — точка эллипса, так что $x_0^2-a^2=-\dfrac{a^2y_0^2}{b^2}$).

Таким образом, уравнение искомой касательной имеет вид

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

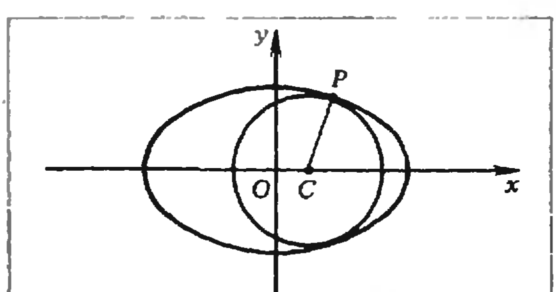


Рис. 3.

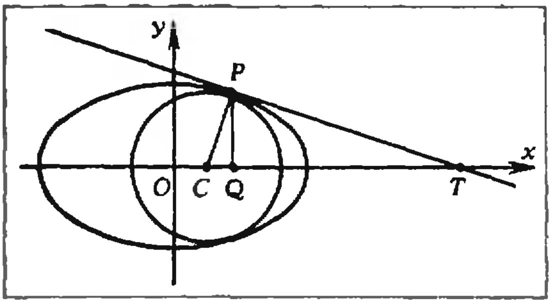


Рис. 4.

После элементарных преобразований окончательно получаем

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad (3)$$

— мы видим, что уравнение касательной как бы родственно уравнению эллипса.

Читатель, знающий производные, мог все это предвидеть: ведь мы рассматривали эллипс — кривую второго порядка, а производные уравнения такой кривой — линейные функции.

Хотя уравнение (3) и было выведено при условии $0<|x_0|<a$, но и в случаях $x_0=0$ и $|x_0|=a$ прямая, заданная уравнением (3), будет касательной к эллипсу,— убедитесь в этом.

В заключение заметим, что уравнение касательной к эллипсу можно найти совсем просто, пользуясь тем, что эллипс получен сжатием из окружности. Точка $(x_0;\ y_0)$ эллипса (1) получена при сжатии с коэффициентом $t=\frac{b}{a}$ к оси абсцисс из точки $(x_0;\ t^{-1}y_0)$ окружности $x^2+y^2=a^2$. Касательная к окружности в точке $(x_0;\ t^{-1}y_0)$ перпендикулярна радиусу, идущему в эту точку. Угловой коэффициент радиуса равен $\frac{t^{-1}y_0}{x_0}$; значит, угловой коэффициент касательной к окружности равен $-\left(\frac{t^{-1}y_0}{x_0}\right)^{-1}=-\frac{tx_0}{y_0}$. При сжатии к оси абсцисс с коэффициентом t касательная к окружности превращается в касательную к эллипсу, а ее угловой коэффициент уменьшается в t раз, то есть делается равным

$$-\frac{t^2x_0}{y_0}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Однако это рассуждение использует очень частное геометрическое свойство эллипса — его родство с окружностью. Убедиться в общности метода Декарта читатель может, сделав упражнение: пользуясь этим методом, найти уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ (в точке $(x_0;\ y_0)$).

Паркеты из правильных многоугольников

(Начало см. на с. 3)

Первая наша задача состоит в том, чтобы найти все решения уравнения (1) с целыми $m_i>0$. Уравнение (1), сокращая на $2d$, удобно записать в виде

$$\Sigma m_i\left(1-\frac{2}{i}\right)=2. \qquad (2)$$

Для каждого решения уравнения (2) надо исследовать соответствующие расположения многоугольников, примыкающих к вершине. Например, решению $m_3=1$, $m_4=2$; $m_6=1$,

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+2\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right)=2,$$

соответствуют вершины, в которых сходится один треугольник, два квадрата и один шестиугольник. Их легко расположить двумя существенно различными способами (рис. 5, *а* и *б*). Но легко показать (докажите), что расположению *б* не соответствует никакой правильный паркет.

Указаний дано достаточно. Беритесь за работу!

Советуем прочесть

В серии «Библиотечка «Квант» издательства «Наука» готовится к выходу в свет книга «Рассказы о физике и физиках» (выпуск 53). В этой книге собраны статьи, написанные в разные годы для читателей нашего журнала академиком И. К. Кикоиным, первым главным редактором «Кванта». Мы уверены, что знакомство с «Рассказами...» будет полезным и интересным и сегодняшним школьникам.


Почему при резком торможении автомобиль заносит?
Почему скрипит плохо смазанная дверь?
Почему движущийся равномерно смычок заставляет
звучать скрипичную струну?
Все это объясняется свойствами силы трения,
о которых и идет речь в этой статье.

Сухое трение

Кандидат физико-математических наук
И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения, которое имеет сложную природу. Одна из причин в том, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Вот пример. Английский физик Гарди исследовал зависимость силы трения между стеклянными пластинками от температуры. Он тщательно обрабатывал пластины хлорной известью и обмывал их водой, удаляя жиры и загрязнения. Трение увеличивалось с ростом температуры. Опыт был повторен много раз, и каждый раз получались примерно одни и те же результаты. Но однажды, мо́я пластинки, Гарди протер их пальцами. Трение перестало зависеть от температуры. Протерев пластинки, Гарди, как он сам считал, удалил с них очень тонкий слой стекла, изменивший свои свойства из-за взаимодействия с хлоркой и водой.

Когда говорят о трении, различают три несколько отличных физических явления: трение при движении тела в жидкости или газе — его называют жидким трением; сопротивление, возникающее, когда тело скользит по какой-нибудь поверхности,— трение скольжения, или сухое трение; сопротивление, возникающее, когда тело катится,— трение качения. Эта статья посвящена сухому трению.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи. Он измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске, причем, ставя бруски на разные грани, определял зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи не были опубликованы. Они стали известны уже после того, как классические законы трения были в 17—18 вв. вновь открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном.

Вот эти законы: 1) сила трения скольжения F прямо пропорциональна силе N нормального давления тела на поверхность, по которой движется тело: $F=kN$, где k — безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения; 2) сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями; 3) коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей; 4) сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет исследований трения подтвердили правильность трех первых законов. Не совсем верным оказался лишь последний — четвертый. Но это стало ясно много позже, когда появились железные дороги и машинисты заметили, что при торможении состав ведет себя не так, как предсказывали инженеры.

Амонтон и Кулон объясняли происхождение трения довольно просто. Обе поверхности неровные, они покрыты небольшими горбами и впадинами. При движении выступы цепляются друг за друга, и поэтому тело все время поднимается и опускается. Для того чтобы втащить тело на «холмы», к нему нужно приложить определенную силу. Если выступы большие, то и сила нужна побольше. Но это объяснение противоречит одному очень существенному факту: на трение тратится энергия. Кубик, скользящий по горизонтальной поверхности, останавливается. Его энергия расходуется на трение. А поднимаясь и опускаясь, тело не тратит своей энергии. Вспомните аттракцион «американские горы». Когда санки скатываются с горки, их потенциальная энергия переходит в кинетическую и скорость санок возрастает, а когда санки въезжают на новую возвышенность, кинетическая энергия, наоборот, переходит в потенциальную. Энергия санок уменьшается за счет трения, но не из-за подъемов и спусков. Аналогично обстоит дело и при движении одного тела по поверхности другого. Здесь потери энергии на трение также не могут быть связаны с тем, что выступы одного тела взбираются на бугры другого.

Есть еще возражения. Например, простые опыты по измерению силы трения между полированными стеклянными пластинками показали, что

Эта статья была опубликована в самом первом номере журнала («Квант», 1970, № 1, с. 37).

при улучшении полировки поверхностей сила трения сначала не меняется, а затем возрастает, а не убывает, как следовало бы ожидать на основании модели явления, предложенной Амонтоном и Кулоном.

Механизм трения значительно более сложен. Из-за неровностей поверхностей они соприкасаются только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасающихся тел сходятся на расстояния, соизмеримые с расстоянием между молекулами в самих телах, и «сцепляются»; образуется прочная связь. При движении тела связи постоянно создаются и рвутся. При этом возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится часть энергии движущегося тела. В конечном итоге она переходит в тепло.

Площадь действительного контакта составляет обычно от одного до двух тысяч квадратных микрон. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются, и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

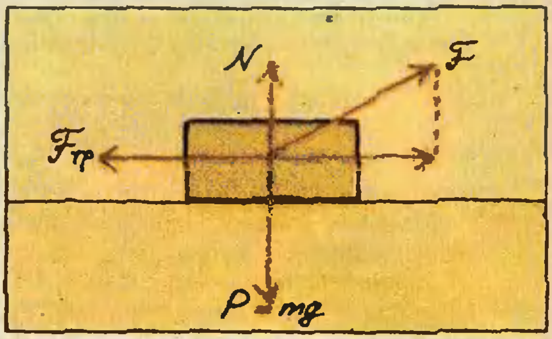
При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул.

Теперь понятен опыт с полированными стеклянными пластинками. Пока поверхности были «грубые», площадь контактов была невелика, а после хорошей полировки оно возросло. Можно привести еще пример увеличения трения с «улучшением» поверхности. Если взять два металлических бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит!

В домашних условиях можно провести следующий опыт. Поставьте бокал на стеклянную пластинку и, привязав к ножке бечевку, потащите бокал. Затем постарайтесь как можно лучше очистить стекло, смыть жиры и грязь. Опять потащите. Теперь это сделать значительно труднее. Чистый контакт стекло — стекло разорвать нелегко. Присмотревшись к поверхности, вы сможете заметить даже царапины. Вырвать кусочки стекла оказывается легче, чем разорвать контакт!

Рассмотренная нами модель трения довольно груба. Мы не останавливались здесь на диффузии молекул, то есть на проникновении молекул одного тела в другое, на роли электрических зарядов на соприкасающихся поверхностях, на роли и механизме действия смазки. Эти вопросы во многом не ясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом: $F=kN$. И хотя коэффициент трения k не очень постоянен и несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике, можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Сухое трение имеет одну существенную особенность: трение покоя. Если в жидкости или газе трение возникает только при движении тела и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу, то при сухом



трении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы F на плоскость, касательную к поверхности, на которой лежит тело, станет больше некоторой величины. Пока тело не начало скользить, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы сила трения тоже возрастает, пока не достигает максимальной величины, равной kN, при которой начинается скольжение. Дальше сила трения практически уже не меняется.

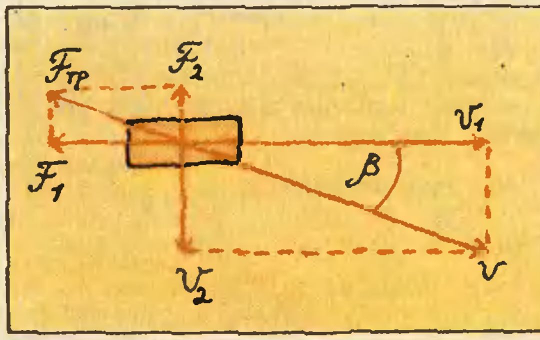
Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос «какая сила трения действует на стол весом 300 Н, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4», большинство уверенно отвечает: «120 Н», что неверно. Сила трения равна нулю, иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то для того чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, бóльшую максимально возможной силы трения покоя, которое обусловлено прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

Попробуйте проделать простой опыт. Возьмите книжку и положите ее одним краем на другую книжку потолще. Получится наклонная плоскость. Теперь положите на эту плоскость спичечный коробок, к которому привязана нитка. Если коробок скользит, то уменьшите наклон плоскости, взяв книжку-подставку потоньше. Потяните за нитку коробок вбок. При этом он поедет еще и вниз! Уменьшите наклон плоскости и опять потяните за нитку. Та же картина. Коробок соскальзывает даже при очень малых углах наклона плоскости. Сила трения, раньше удерживавшая коробок на плоскости, стала почему-то очень маленькой.

Попробуем понять, в чем здесь дело. Если бы коробок двигался только горизонтально, то параллельно ребру наклонной плоскости на него действовала бы сила трения, равная kN. Для того чтобы коробок при этом не соскальзывал вниз, вверх на него должна действовать сила трения, равная по величине проекции силы тяжести на наклонную плоскость. Равнодействующая этих двух сил трения больше, чем kN, а этого быть не может. Значит, коробок должен соскальзывать с наклонной плоскости.

Возьмем брусок, привяжем к нему нить и, положив брусок на горизонтальную плоскость, будем тянуть за нить с постоянной скоростью $\vec{v}_1$. Приложив к бруску силу, перпендикулярную к $\vec{v}_1$, его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью $\vec{v}_2$. Сила трения при этом будет равна kN и направлена противоположно скорости $\vec{v}$ движе-



ния бруска относительно плоскости ($\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$). Разложим силу трения на две составляющие по направлениям скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$:

$$F_1=F_{тр}\cos\beta,\quad F_2=F_{тр}\sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}$, а $\operatorname{tg}\beta=v_2/v_1$.

Составляющая F_1 силы трения уравновешивает силу натяжения нити, а составляющая F_2 — «боковую» силу, приложенную к бруску. Так как

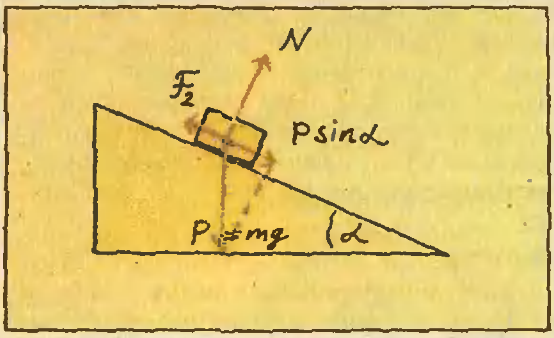
$$\sin\beta=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

то

$$F_2=F_{тр}\frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1+(v_2/v_1)^2}}=F_{тр}\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Если $v_2\ll v_1$, то угол β мал и $\sin\beta\approx\operatorname{tg}\beta$. В этом случае $F_2=F_{тр}\operatorname{tg}\beta=kN\frac{v_2}{v_1}$, и составляющая силы трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такая, как при малых скоростях при жидком трении. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.

Любопытный вывод можно теперь сделать для коробка, движущегося по наклонной плоскости. Здесь $F_2=P\sin\alpha$, а $N=P\cos\alpha$ ($P=mg$ — сила тяжести, действующая на коробок,



α — угол наклона плоскости к горизонту). Поэтому

$$P\sin\alpha = kP\cos\alpha\,\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},$$

откуда

$$v_2 = v_1\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{k^2-\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

(Это справедливо, конечно, лишь при $\operatorname{tg}\alpha<k$, так как при бо́льших углах наклона плоскости к горизонту коробок уже не удерживается на плоскости силой трения.)

При малых углах наклона плоскости к горизонту (таких, что $\operatorname{tg}\alpha\ll k$)

$$v_2 = v_1\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k},$$

то есть скорость соскальзывания коробка пропорциональна скорости его движения параллельно ребру наклонной плоскости и тангенсу угла наклона плоскости к горизонту.

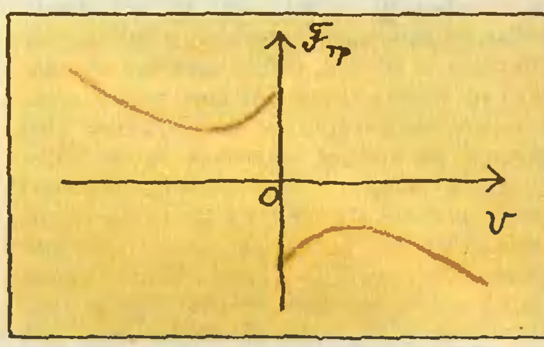
Этот вывод легко проверить экспериментально. Так как при равномерном движении путь, пройденный телом, пропорционален скорости, то отношение скорости v_2 к v_1 будет равно отношению отрезков, которые пройдет коробок в этих направлениях.

Явление, о котором шла речь, совсем не редкое. Например, известно, что при резком торможении электродвигателя ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что при торможении двигателя ремень начинает проскальзывать относительно шкивов, и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекос в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня. Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление; машину «заносит». Колеса скользят по дороге, а боковая сила возникает за счет неровностей дороги.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона — Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь имеют много специфических трудностей, они окупаются использованием полученных сведений, например, в теории резания металлов, в расчетах движения пуль и снарядов в стволе и т. д.

Обычно считают, что для того чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить бо́льшую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Например, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в стволе показали, что с увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, затем она уменьшается все медленнее, и при скоростях, бо́льших 100 м/с, начинает расти.



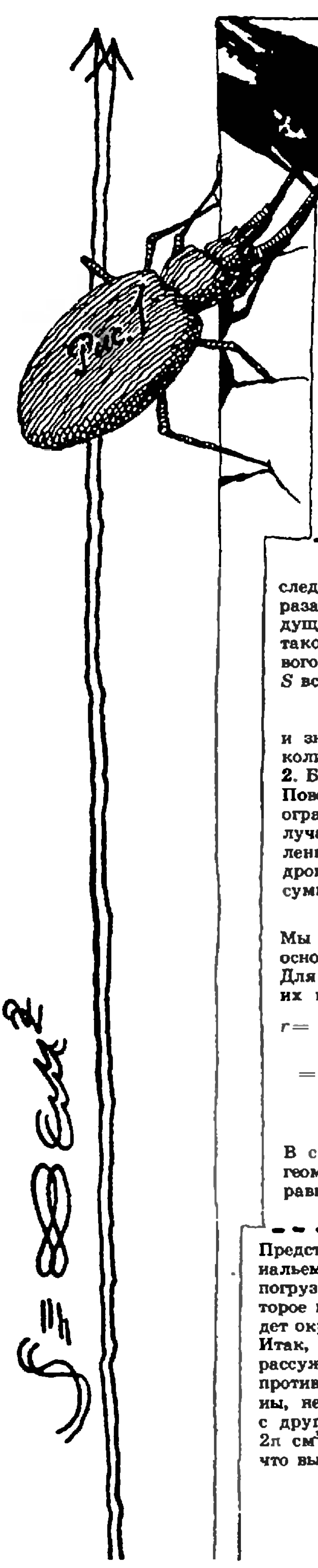
Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 м/с температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла. Трение становится жидким. При больших же скоростях жидкое трение пропорционально квадрату скорости.

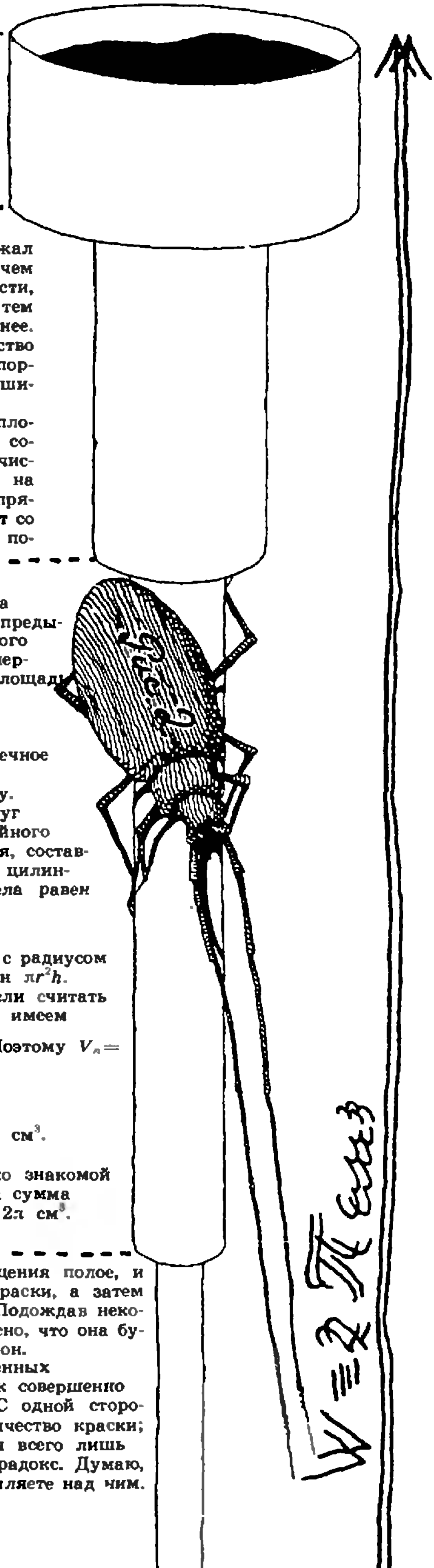
Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах — скрипке, виолончели, альте.

(Окончание см. на с. 18)

Малярный парадокс

А. А. Панов





1. Каждый, кто держал кисть в руке, знает, что чем больше площадь поверхности, которую нужно окрасить, тем больше краски уйдет на нее. Другими словами, количество необходимой краски пропорционально площади окрашиваемой поверхности.

Возьмем, например, плоскую пластинку, которая составлена из бесконечного числа прямоугольников, как на рисунке 1. Здесь первый прямоугольник — это квадрат со стороной 1 см, а каждый последующий прямоугольник в два раза длиннее и в два раза у́же предыдущего. Ясно, что площадь любого такого прямоугольника, как и первого, равна 1 см^2. Поэтому площадь S всей пластины бесконечна:

$$S=(1+1+1\ldots)\text{ см}^2,$$

и значит, на нее уйдет бесконечное количество краски.

2. Будем рассуждать по-другому. Повернем нашу пластинку вокруг ограничивающего ее прямолинейного луча. Получится тело вращения, составленное из бесконечного числа цилиндров (рис. 2). Объем этого тела равен сумме объемов всех цилиндров:

$$V=V_1+V_2+V_3+\ldots$$

Мы знаем, что объем цилиндра с радиусом основания r и высотой h равен $\pi r^2 h$. Для цилиндра с номером n, если считать их на рисунке 2 сверху вниз, имеем $r=\dfrac{1}{2n-1}$ см, $h=2^{n-1}$ см. Поэтому $V_n=$

$=\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$ см^3, и значит,

$$V=\pi\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)\text{ см}^3.$$

В скобках стоит сумма хорошо знакомой геометрической прогрессии. Эта сумма равна 2, и следовательно, $V=2\pi$ см^3.

Представим, что наше тело вращения полое, и нальем в него доверху 2π см^3 краски, а затем погрузим туда нашу пластинку. Подождав некоторое время, выние пластинку. Ясно, что она будет окрашена, и даже с двух сторон.

Итак, перед нами два безукоризненных рассуждения, которые приводят к совершенно противоположным результатам. С одной стороны, необходимо бесконечное количество краски; с другой стороны, ее потребуется всего лишь 2π см^3. Это и есть малярный парадокс. Думаю, что вы с удовольствием поразмышляете над ним.

Секрет Старого Бондаря

Доктор физико-математических наук
М. Б. БАЛК

Иоганн Кеплер — придворный математик австрийского императора Матвея I и знаменитый астроном — с любопытством и восхищением наблюдал, как молодой винодел поразительно легко и быстро называл емкость одной бочки за другой. Кеплер вспомнил нудное измерение, применяемое на Рейне: не боясь скучной потери времени, там наполняют бочку, отсчитывая количество влитых в нее «амфор» (емкостей, принятых за единицу измерения), а затем выжигают на бочке вместимость — чтобы, не дай бог, не пришлось выполнять эту утомительную процедуру еще раз.

А тут... Парень просовывает медный оконечник линейки через наливное отверстие полной бочки (рис. 1),

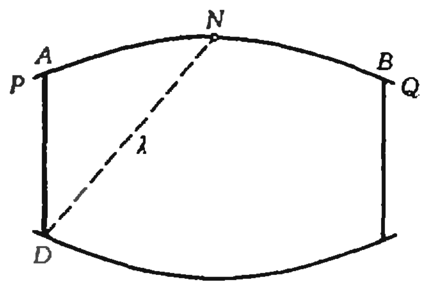


Рис. 1.

поперек до «пятки» (самой нижней точки) деревянного днища, и по той пометке на линейке, которая оказывается у наливного отверстия (у верхней точки «пуза» бочки), сразу называет вместимость бочки. Бочки были разные— большие и маленькие, более «пузатые» и совсем «худощавые»,— но это не беспокоило парня, он одинаково быстро и уверенно выдавал ответ. «Неужели жульничает?» — промелькнуло в голове у Кеплера.

— Не беспокойтесь, господин математик его величества,— сказал парень, как бы прочитав мысль Кеплера.— Этот способ измерения емкостей установлен у нас в Линце городскими властями, и цех бондарей ручается за точность измерения.

— Неужели для любых бочек?

— Насчет любых не знаю, но для бочек здесь, в Австрии,— наверняка,— сострил парень.

— Но на каком основании ты так уверен в правильности этого способа?

— Чего не знаю, того не знаю. Не стану врать. Говорят, много лет назад жил здесь Старый Бондарь, он предложил вот этот способ. А почему он так предложил — не знаю.

* * *

О том, как Кеплер разгадал секрет австрийских бондарей, он рассказал в книге «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму, и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». Хотя книга была опубликована 370 лет назад (1615 г.), она, как мы увидим, поучительна и сейчас.

Сначала Кеплер рассмотрел случай

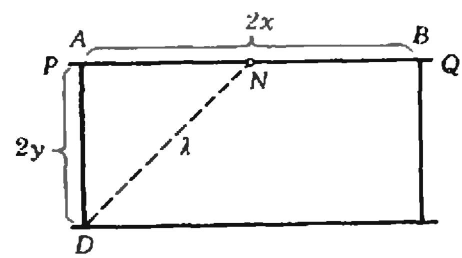


Рис. 2.

цилиндрической бочки (рис. 2). Пусть $ND=\lambda$, длина образующей AB равна $2x$, диаметр днища AD равен $2y$; тогда

$$x^2+4y^2=\lambda^2, \qquad (1)$$

и вместимость бочки можно найти по формуле

$$v=\frac{1}{2}\pi(\lambda^2-x^2)x. \qquad (2)$$

Нетрудно выразить вместимость бочки через расстояние λ и отношение (t) длины образующей к диаметру днища ($t=x/y$). Из (1) и (2) следует, что

$$v=2\pi\lambda^3t(4+t^2)^{-\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

«Из этих формул видно,— рассудил Кеплер,— что емкость цилиндрической бочки не определяетя только расстоянием λ; чтобы можно было пользоваться способом австрийских бондарей, мы должны иметь дело с бочками, для которых отношение t зафиксировано ($t=t_0$). Каким же образом лучше всего выбрать это отношение? Как выгоднее всего выбрать соотношение между длиной образующей и диаметром днища? Рассуждаем с точки зрения винодела. Он заинтересован в выборе — среди всевозможных значений параметра t — такого значения (t_0), чтобы среди всех бочек, у которых расстояние ND равно λ, выбранная им бочка имела самый большой объем (v_0): тогда он может вычислять ее емкость по формуле (3), а если окажется, что при изготовлении бочки бондарь не сумел точно соблюсти идеальное отношение t_0, а немножко отступил от него ($t \approx t_0$, но $t > t_0$ или $t < t_0$), то винодел тоже не прогадает: реальная емкость бочки v будет обязательно меньше v_0. Таким образом, винодел назовет объем v_0 (и получит с покупателя соответствующую плату), а на самом деле отдаст покупателю немного меньшее количество вина, а именно v.

Но, с другой стороны, уважающий себя винодел не заинтересован в том, чтобы обмануть покупателя; он заинтересован в том, чтобы емкость реальной бочки (соответствующей реальному выбору параметра t, близкому к t_0) по возможности меньше отличалась от емкости v_0, соответствующей лучшему значению параметра (t_0). Еще больше в этом заинтересован покупатель. Оказывается, что это тоже достигается при таком выборе параметра t, при котором объем бочки v наибольший.»

Владея понятием производной, мы можем легко обосновать это соображение Кеплера (Кеплеру было намного труднее, чем нам, найти обоснование: ведь его книга вышла за 70 лет до рождения дифференциального исчисления). Воспользуемся следующим общим соображением. Пусть $f(t)$ — какая-нибудь функция от t (ради простоты — такая, которая имеет при $t > 0$ производную первого порядка); пусть t_0 — какое-нибудь выбранное нами значение аргумента t. Тогда, при малом приращении h, то есть при $t = t_0 + h$, имеем

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)h + \alpha(h)\cdot h,$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ (см. «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 22).

Отсюда видим: если $f'(t_0) \neq 0$, то отклоненение $f(t)$ от $f(t_0)$ будет — при малых h — практически пропорционально h. Но если t_0 — точка максимума (или минимума) для данной функции, то отклонение равно $\alpha(h)\cdot h$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Это значит, что вблизи точки экстремума (t_0) малое отклонение параметра t от t_0 сказывается на изменении функции $f(t)$ существенно слабее (Кеплер говорит: «нечувствительно»), чем вблизи другого значения аргумента t, где $f'(t) \neq 0$. Применительно к нашему случаю (см. формулу (3)) это означает, что выгоднее всего выбрать параметр t так ($t = t_0$), чтобы цилиндрическая бочка имела наибольшую вместимость (v_0): в этом случае при небольших — и неизбежных на практике — отклонениях параметра t от t_0 отклонение емкости v бочки от v_0 будет «нечувствительным».

Кеплер находит затем (при заданном λ) то значение отношения t, при котором вместимость бочки (v) будет наибольшей. Используя понятие производной, мы можем это сделать значительно легче и быстрее, чем Кеплер. Воспользуемся формулой (2) для v. Тогда

$$v'(x) = \frac{1}{2}\pi(\lambda^2 - 3x^2),$$

$$x = \lambda/\sqrt{3},\ 4y^2 = \lambda^2 - x^2 = 2\lambda^2/3,\ y = \lambda/\sqrt{6},$$

$$t_0 = x/y = \sqrt{2} \approx 1{,}41. \qquad (4)$$

При таком значении параметра t вместимость цилиндрической бочки будет максимальной (при данном λ) и будет равна

$$v_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\lambda^3. \qquad (5)$$

* * *

«Обращусь теперь к более общему случаю, — рассуждал Кеплер, — когда «клепки» бочки (доски, составляющие ее боковую поверхность) будут изогнутыми (а не прямолинейными, как в случае цилиндрической бочки). Такую бочку можно с достаточно хорошей точностью представить себе как составленную из двух одинаковых усеченных конусов, состыкованных своими большими основаниями (рис. 3).

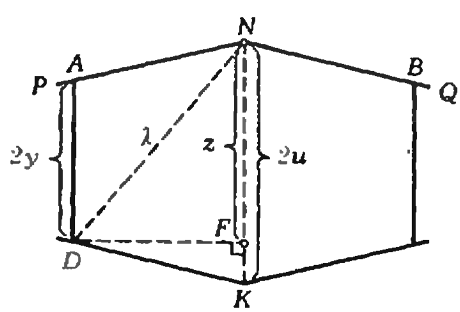


Рис. 3.

При этом я, конечно, допущу некоторую неточность, но если бочка не очень «пузатая», то погрешность будет незначительной. Затем среди все возможных бочек, у которых расстояние ND равно заданному λ, выберу ту, которая имеет наибольшую вместимость.»

Следуя этому плану решения, предложенному Кеплером, мы можем выразить емкость (v) бочки через расстояние λ, через радиус (y) меньшего основания усеченного конуса и через расстояние $z=NF$ (F — основание перпендикуляра, опущенного из точки D меньшего основания усеченного конуса на большее основание). Проделаем эти выкладки, воспользовавшись формулой для объема усеченного конуса и учитывая, что высота усеченного конуса равна $DF=\sqrt{\lambda^2-z^2}$. Несложные преобразования приводят нас к формуле

$$v=\frac{2}{3}\pi\left(y^2+(z-y)^2+y(z-y)\right)\times \times\sqrt{\lambda^2-z^2}. \qquad (6)$$

Кеплер сумел выяснить, при каких соотношениях между размерами бочки (иначе говоря, при каких значениях y и z при заданном λ) вместимость бочки будет наибольшей. Мы могли бы получить результат Кеплера, решив следующую задачу:

З а д а ч а. *Докажите, пользуясь понятием производной, что среди бочек указанного вида с заданным значением λ расстояния ND наиболее вместимой оказывается цилиндрическая бочка, у которой образующая в $\sqrt{2}$ больше диаметра днища.* (Решение см. на с. 63.) Теперь учтем соображение Кеплера, что «вблизи своей точки максимума малое изменение аргументов функции нечувствительно сказывается на изменении ее значения». Применительно к нашему случаю это означает, что если размеры какой-нибудь бочки мало отклоняются от размеров наилучшей бочки (то есть цилиндрической, с отношением $AB:AD=\sqrt{2}$), то эти отклонения «нечувствительно» сказываются на емкости бочки. Поэтому объем бочки, мало отличающейся от «наилучшей», можно вычислить по той же формуле (5).

«Теперь понятно,— подумал Кеплер, что такое «австрийская» бочка: это бочка, у которой образующая ANB длиннее диаметра примерно в $\sqrt{2}$ раз. Так как при выборе длины «клепки» PNQ следует еще учесть толщину двух днищ и то, что клепка должна немного выходить за край днища, то на практике это означает, что клепка должна быть примерно в полтора раза длиннее диаметра днища.»

Более того, Кеплеру стало ясно, как найти объем «австрийской бочки» с помощью обычной линейки: надо измерить расстояние ND и вычислить емкость бочки v_0 по формуле (5). «Но ведь винодел называл объем бочки без вычислений! — размышлял Кеплер.— Видимо, дело в том, что линейка — *необычная*, пометки на ней расставлены не так, как на обычной линейке. Каким же образом эта линейка проградуирована?..

Сначала надо бы сообразить, что это за таинственная «амфора», о которой говорил винодел. Вероятно, это тоже какой-нибудь бочонок, но его вместимость принимается за единицу объема. Но если австрийские бочары предпочитают все бочки делать так, чтобы отношение длины клепки к диаметру основания было оптимальным (около 1,5), то при изготовлении эталонного бочонка, «амфоры», они вряд ли отказались от того же соотношения. Пусть для эталонного бочонка (рис. 4) расстояние N_1D_1 равно λ_1. Тогда

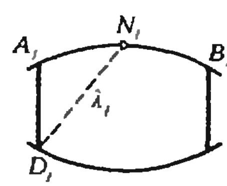


Рис. 4.

имеем (см. (5)) $1=(\pi/3\sqrt{3})\lambda_1^3$). Учитывая (5), получаем для емкости любой «австрийской» бочки такую достаточно хорошую приближенную формулу: $v_0=(\lambda/\lambda_1)^3$ (амфор). Значит, чтобы найти v_0, нам достаточно знать не λ, а отношение λ/λ_1. И даже не само это отношение, а его куб. Числа $(\lambda/\lambda_1)^3$ при различных λ и надо нанести на линейку, то есть градуировать линейку не равномерно, а по «кубическому закону». На расстоянии от медного оконечника (рис. 5), равном λ_1, $2\lambda_1$, $3\lambda_1$ и т. д., ставить пометки: 1; $8(=2^3)$;

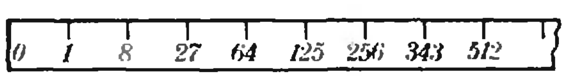


Рис. 5.

$27(=3^3)$ и т. д. И вообще — на расстоянии $k\lambda_1$ (k — любое положительное число) ставить пометку, равную k^3. Если я теперь вставлю вот такую линейку в бочку так, чтобы ее медный оконечник упирался в пятку днища (D), то числовая пометка у наливного отверстия (N) как раз укажет, сколько амфор вмещается в бочку.»

* * *

Осенью 1615 года по просьбе Кеплера в городской ратуше Линца состоялась его встреча со старостой цеха бондарей.

— Господин староста,— начал Кеплер,— меня интересует способ, которым австрийские бондари и виноделы пользуются для измерения вместимости бочек.

— Видите ли, господин математик его величества,— возразил староста,— это производственный секрет нашего цеха. Эта тайна переходит от одного поколения бондарей к следующему, еще со времен Старого Бондаря.

— Я так и полагал, что когда-то существовал некий превосходный геометр, научивший этому способу ваших бочаров. Но думаю, что я сумел разгадать его секрет.

— Тогда скажите, господин математик его величества, в чем, по Вашему мнению, состоит секрет Старого Бондаря, и я обещаю подтвердить то, что в ваших словах будет истинным.

— Размышления привели меня к выводу,— ответил Кеплер,— что при изготовлении бочки любых размеров вы, бочары Линца, пользуетесь только одним соображением: чтобы длина клепок была в полтора раза больше, чем поперечник днища.

— Совершенно истинно! — с удивлением подтвердил бочар.

— А кроме того, для измерения емкости бочки вы пользуетесь линейкой, на которой деления расположены по «кубическому закону».

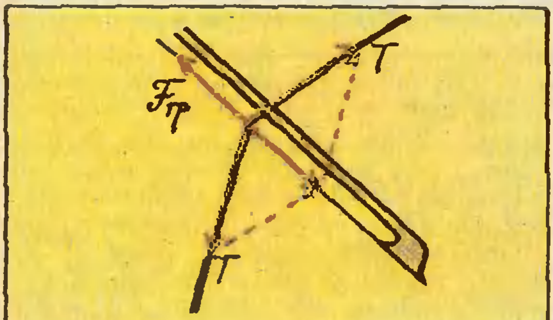
— И это правда,— с еще большим удивлением подтвердил староста цеха бондарей, с опаской взглянув на Кеплера.— Да не ясновидец ли вы, господин Кеплер? Я слышал, что вы, как королевский звездочет, умеете читать прошлое и будущее по расположению звезд. Неужели секрет Старого Бондаря вы разгадали с помощью астрологии?

— Нет, я его вычислил с помощью математики,— ответил Кеплер, и на этом разговор окончился.

Сухое трение

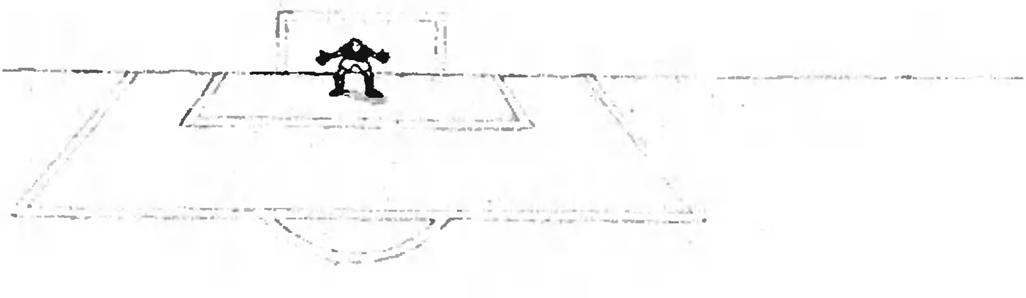
(Начало см. на с. 8)

При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы.



Но при проскальзывании трение уменьшается. Поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, и смычок опять захватывает струну. Все повторяется. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, так как энергия, потерянная струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

Этим можно и закончить статью о сухом трении — явлении, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления и делать расчеты, необходимые при конструировании машин.



Шестидесятиатомный углерод

Около года назад в научных журналах появилось сообщение о том, что химики открыли необычную по своей геометрии молекулу, «сделанную» из шестидесяти атомов углерода. Химическая формула такой молекулы — C_{60}. Все шестьдесят ее атомов расположены в вершинах усеченного икосаэдра — многогранника с 60 вершинами, 32 гранями и 90 ребрами.

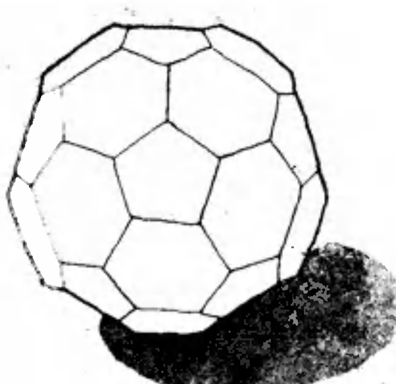
Сказанное, по-видимому, требует комментариев. Прежде всего надо пояснить, что значит «открыли... молекулу». Дело в том, что молекулу C_{60} не синтезировали, подобно тому, например, как несколько лет назад синтезировали молекулу-додекаэдр $C_{20}H_{20}$ (см. «Квант», 1983, № 9, с. 21), а именно открыли. Когда испаряли углерод (нагревая его) в поток инертного гелия, обнаружили возникновение компактных и довольно стабильных образований (кластеров) из большого числа атомов углерода. Неожиданно оказалось, что больше всего образуется кластеров из 60 атомов — во всяком случае, раз в 5—6 больше, чем кластеров из 59 или 61 атомов.

Возможно, что своим существованием 60-атомные молекулы обязаны... геометрии. Известно, что чем более симметрична молекула, тем она прочнее (тем больше у нее энергия связи). Вот почему устойчивы молекулы-додекаэдры и вновь открытые молекулы из 60 атомов углерода, а кластеры из 59 или 61 атома живут недолго и быстро разваливаются.

Как же «устроена» новая молекула? Усеченный икосаэдр знаком, наверное, почти всем. Такую форму имеет, например, «официальный» футбольный мяч, сшитый из 20 шестиугольников (обычно светлых) и 12 пятиугольников (обычно темных). Посмотрите на такой мяч внимательно. Его связь с икосаэдром видна не сразу — слишком он похож на шар! Однако связь есть и самая непосредственная.

Представьте себе икосаэдр — многогранник с 20 треугольными гранями и 12 вершинами, в которых сходятся по пять ребер. Отрежем от каждой вершины пирамидку так, чтобы на месте вершины образовался пятиугольник. У оставшихся частей граней вместо 3 сторон станет 6. Если обрезать «правильно», то шестигранники будут правильными и их будет 20 — столько же, сколько было граней у икосаэдра. В результате получился многогранник с $12+20=32$ гранями. Вершин у него 60, так как у плоских граней $5\times12+6\times20=180$ вершин, а в каждой вершине многогранника сходятся 3 грани ($180:3=60$). Число ребер можно сосчитать разными способами. Например, так. В каждой вершине сходятся 3 ребра, поэтому концов ребер будет $3\times60=180$, а ребер — $180:2=90$. Таким образом обычный икосаэдр «превращается» в усеченный.

А теперь задача. Углерод обычно 4-валентный, а от каждой вершины усеченного икосаэдра идут только 3 ребра. Значит, одна связь должна быть двойной. В структурных химических формулах двойную связь условно принято обозначать двойной линией. Как надо расположить двойные линии, чтобы от каждой вершины усеченного икосаэдра уходила одна и только одна двойная линия? Оцените, сколькими способами это можно сделать. (Заметим, что данная задача важна для определения степени устойчивости молекулы — химики знают, что чем больше способов осуществления двойных связей, тем более устойчива молекула.)



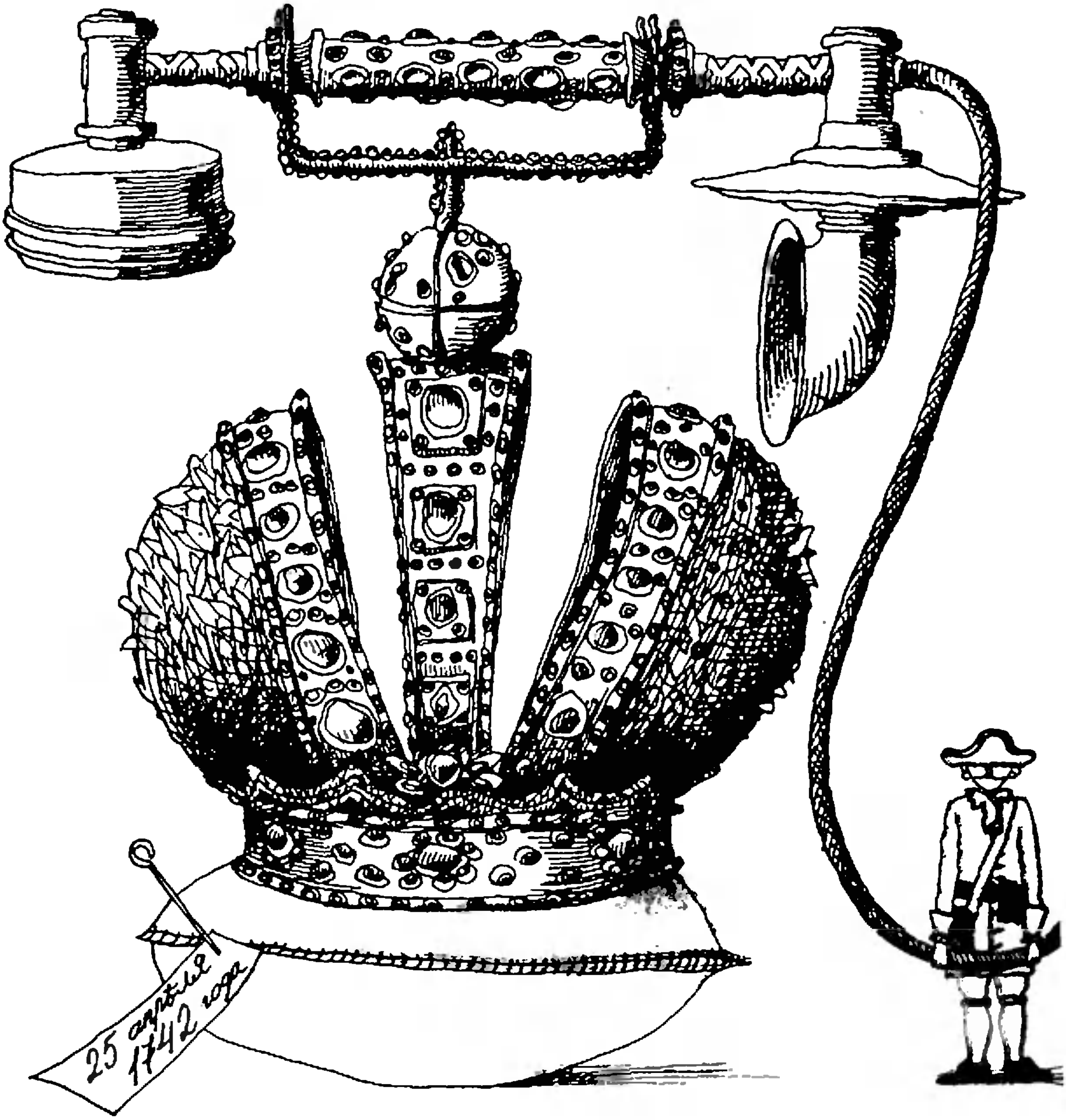
Интересно, что вновь открытую молекулу можно использовать как «клетку», внутрь которой можно «запереть» какой-нибудь атом. При этом атом будет связан с «клеткой» как узник, но «не прикованный» к ней химической связью. Так удалось «запереть» атомы лантана. «Клетка» достаточно просторна — размер молекулы C_{60} примерно $7\cdot10^{-10}$ м, что в 14 раз больше размера атома водорода.

Существует гипотеза, что молекула C_{60} может участвовать в процессе образования органических молекул в космосе.

Недавно было высказано предположение о возможности существования еще одной необычной молекулы — C_{120}, по своей «геометрии» еще более близкой к сфере. Атомы такой молекулы должны быть расположены в вершинах многогранника, имеющего 62 грани, 180 ребер и 120 вершин. Насколько реально существование такого экзотического соединения, пока не ясно.

Будем следить за новостями.

Я. С.



Как волны передают информацию?

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Мы настолько привыкли видеть на экране телевизора события, происходящие на другом конце света, что даже не удивляемся этому. В современном мире радио, телевидение, телефон позволяют довольно просто получать и передавать необходимую информацию. А ведь еще сравнительно недавно все было совсем иначе...

Для того чтобы передать в Петербург известие о коронации императрицы Елизаветы, происходившей в Москве, на всем пути между этими городами была выстроена цепочка солдат с флажками. В момент коронации первый солдат взмахнул флажком, затем следующий и т. д. Так известие о коронации дошло до Петербурга, где выстрелила пушка. Вот каким сложным способом пользовались для быстрой передачи информации в не столь далекие времена*).

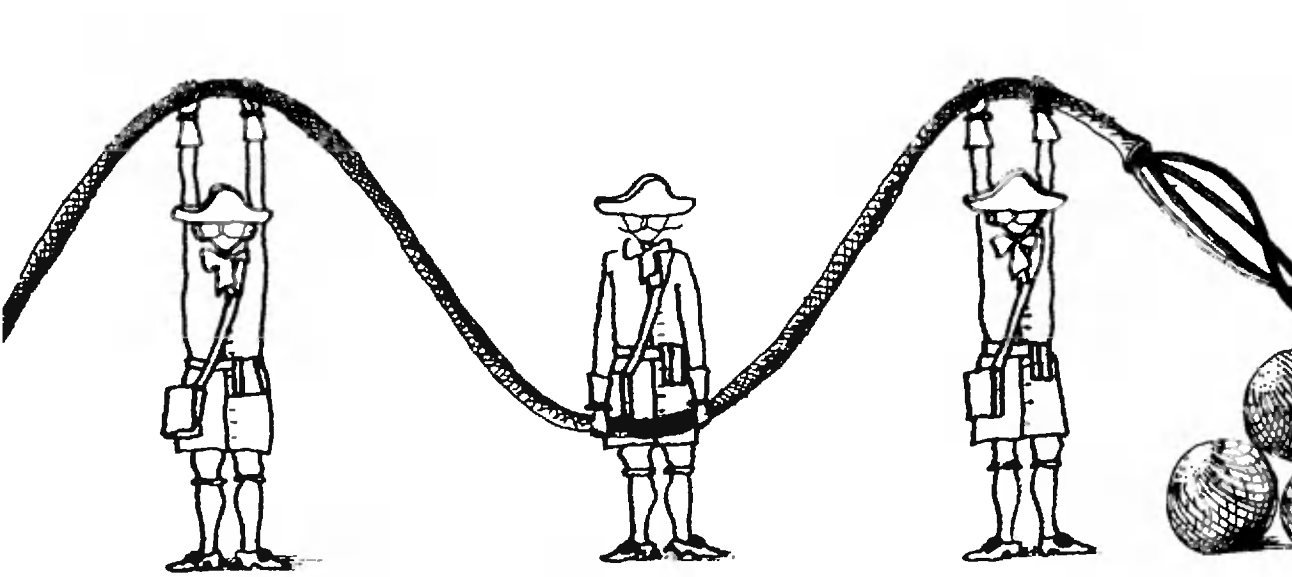
*) На этом примере в статье Л. Г. Асламазова и И. К. Кикоина «Что такое волна?» («Квант», 1982, № 6) обсуждалось понятие волны. Здесь мы продолжим начатый разговор и обсудим проблему передачи информации.

Что же распространялось по цепочке солдат? Каждый солдат оставался стоять на месте, но в некоторый момент времени он изменял свое состояние (поднимал флажок). Это изменение состояния и распространялось по цепочке. В таких случаях говорят, что распространяется волна.

Волны бывают разные. В акустических (звуковых) волнах меняется плотность вещества, в электромагнитных (свет, радиоволны и т. п.) — напряженности электрического и магнитного полей. Бывают температурные волны, волны концентрации при химических реакциях, волны эпидемий и т. п. Образно говоря, волны охватывают все многообразие явлений в природе.

Представьте себе, что каждый солдат не просто взмахнул флажком, а совершает им колебания, периодически поднимая и опуская флажок. Каждый следующий солдат повторяет эти колебания, но с некоторым опозданием (сдвигом по фазе). По цепочке солдат побежит волна. Нечто подобное можно увидеть во время спортивных праздников, когда цепочки людей совершают периодические движения со сдвигом по фазе.

Это красивое зрелище радует глаз, но могут ли передавать информацию такие волны? Очевидно, что нет. Периодически повторяющиеся во времени колебания не несут нам ничего нового, не передают информации. А

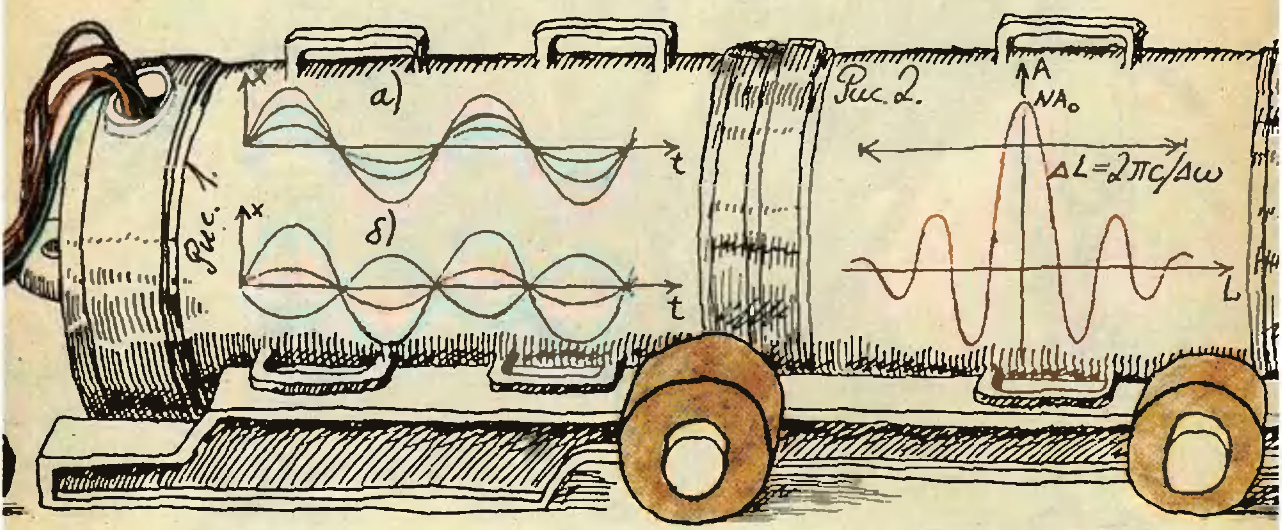


вот с помощью единичного взмаха, когда изменение состояния каждый раз происходило в ограниченной области пространства, можно было передать информацию о начале коронации. Такие ограниченные в пространстве волны называют сигналами.

Простейший тип волны — монохроматическая волна, когда в каждом месте изменение состояния происходит со временем по гармоническому закону с определенной частотой (по закону синуса или косинуса). Многие из встречающихся в природе волн можно считать монохроматическими. Звуковые волны такого типа называют музыкальными тонами. Их возбуждают, например, с помощью камертонов. Монохроматические световые волны получают с помощью лазеров. Волны, близкие к монохроматическим, можно возбудить на поверхности воды, периодически погружая в нее какой-то предмет. В нашей цепочке солдат также можно получить похожие волны.

Можно сделать так, что совершать взмахи в цепочке будут одновременно не один, а два, три или даже несколько стоящих рядом солдат. Тогда протяженность сигнала увеличится. Пользуясь сигналами разной длины, можно передать не только информацию о начале коронации, но и вообще любую информацию. Природа сигнала может быть различной — бывают сигналы звуковые, световые и т. п.

Самое интересное, что любой сигнал можно представить как сумму монохроматических волн с разными частотами (составить из таких волн). Эту возможность дает нам принцип интерференции: при распространении волн колебания в каждом месте пространства складываются. Скажем, в зависимости от сдвига фаз колебания одинаковых частот могут усилить друг друга (при нулевой разности фаз получаются колебания с суммарной амплитудой — рисунок 1, *а*), а могут и ослабить (рисунок 1, *б*). Оказывается, что амплитуды и частоты складываемых монохроматических волн можно подобрать таким образом, что волны гасят друг друга почти во всем пространстве, кроме определенной области, где, напротив, происходит их усиление.



На рисунке 2 показан результат сложения большого числа N волн одинаковой амплитуды A_0 с частотами, лежащими в небольшом интервале от $\omega_0 - \Delta\omega$ до $\omega_0 + \Delta\omega$. Это как бы мгновенная фотография волны, показывающая значение колеблющейся величины A в разных точках пространства в фиксированный момент времени. Имеется центральный максимум с амплитудой NA_0 и множество побочных с быстро убывающими амплитудами. Так что действительно в основном волны гасят друг друга, а их усиление происходит в области центрального максимума.

Важно отметить, что эта область не стоит на месте, а движется со скоростью волны, иными словами — распространяется сигнал. Если скорость c монохроматических волн всех частот одинакова (как, например, при распространении электромагнитных волн в вакууме), то и максимум движется со скоростью c. Его ширина постоянна и равна $\Delta L = 2\pi c/\Delta\omega$. Так что длительность сигнала $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$.

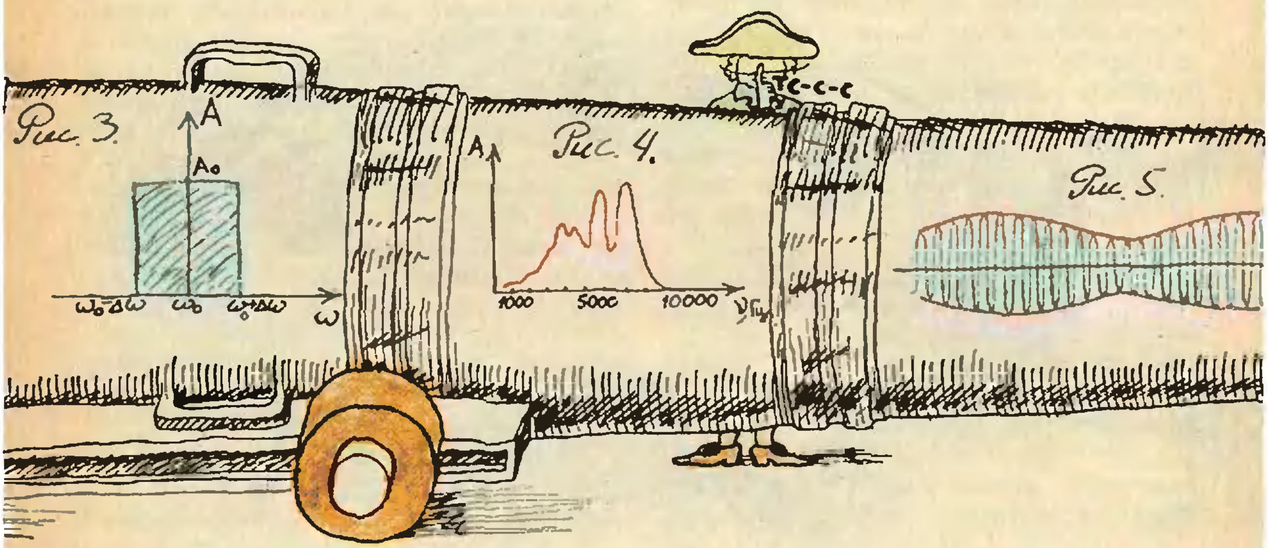
Получается удивительно простое фундаментальное соотношение:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi.$$

Длительность сигнала и ширина диапазона частот волн, из которых сигнал состоит, связаны обратно пропорциональной зависимостью. Качественно это соотношение понятно: сигнал большой длительности (Δt велико) формируется из монохроматических волн близких частот ($\Delta\omega$ мало). А чтобы составить короткий сигнал, нужно сложить много волн с разными частотами. Все, наверное, замечали, что молния вызывает помехи в радиоприемнике во всех диапазонах частот.

Итак, каждый сигнал можно составить из монохроматических волн или же, говоря по-другому, разложить на такие волны. Зависимость амплитуды монохроматических волн, образующих сигнал, от их частоты называется спектром сигнала. В рассмотренном нами случае спектр — прямоугольник высотой A_0 и шириной $2\Delta\omega$, показанный на рисунке 3. Это, конечно, *простейший* спектр. Спектры сигналов, так же как и сигналы, могут иметь самые различные формы.

Когда мы, например, произносим звуки, то заставляем специальным образом колебаться воздух, и эти колебания распространяются в виде звуковых сигналов определенной формы. Спектры этих сигналов существенно различаются в зависимости от того, произносим мы гласную или согласную. Сигнал, соответствующий *гласной, имеет спектр* с двумя характерными максимумами при определенных частотах (их называют формантами). Спектр согласной более «размазан» по всей области частот (на рисунке 4 показан спектр согласной «С»).



Существует специальный метод — гармонический анализ,— позволяющий находить спектры сигналов и восстанавливать сигналы по известным спектрам.

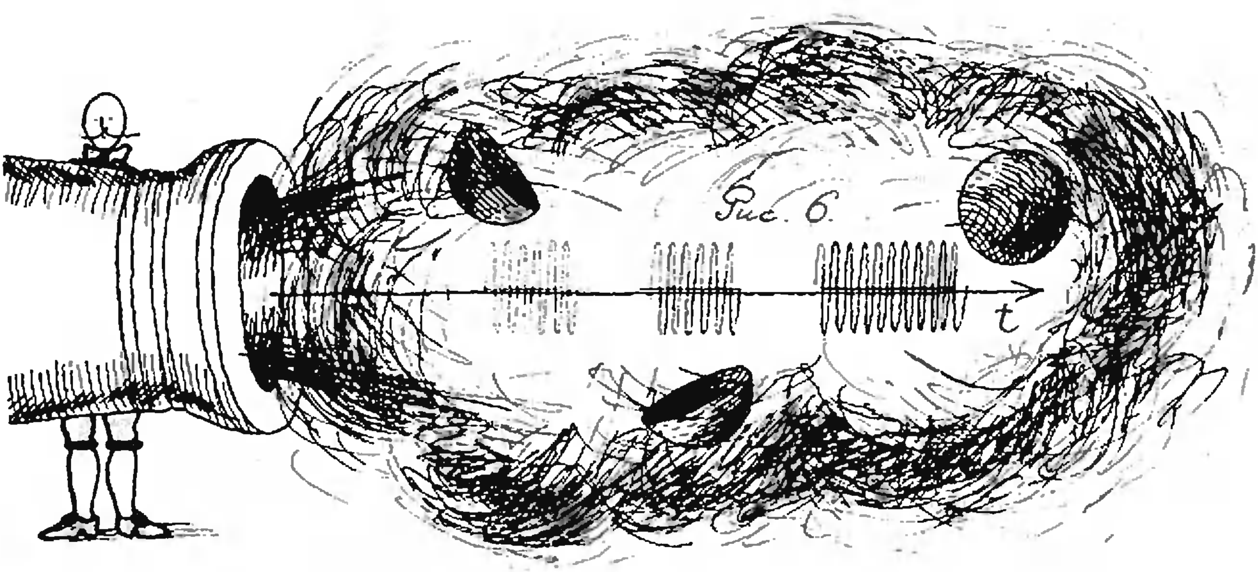
Интересно, что «кричать» умеют и *твердые тела*. Тепловое движение приводит в колебание атомы в кристаллической решетке, и такие колебания передаются по телу в виде упругих волн. Это тоже звуковые волны. Однако их спектр имеет максимум при очень высоких частотах, а в области слышимых частот амплитуда звука пренебрежимо мала (например, даже при очень низкой температуре порядка 5 К максимум соответствует частоте 10^{12}—10^{13} Гц). Так что услышать, о чем говорят твердые тела, можно только с помощью специальных приборов. «Подслушав» эти разговоры (изучив их спектры), ученые узнали много важных «секретов» твердых тел.

Какими же сигналами обычно пользуются для передачи информации? Для связи на коротких расстояниях годятся звуковые сигналы — люди пользуются ими испокон веков. Однако звуковые волны быстро затухают.

В наше время для передачи информации обычно пользуются электромагнитными волнами, способными распространяться на большие расстояния. Из них формируют те или иные сигналы. Можно, например, «заставить» электромагнитную волну *переносить* звуковые сигналы. Для этого частоту волны фиксируют (ее называют *несущей* частотой), а вот амплитуду меняют в такт со звуковыми колебаниями (рис. 5). Таким образом формируют последовательность сигналов, передающих нужную информацию. В приемном пункте сигналы расшифровывают (детектируют) — выделяют огибающую, соответствующую звуковым колебаниям. Этот метод называют амплитудной модуляцией. Он широко применяется при передаче радио- и телепрограмм.

Возникает вопрос: а как много информации за единицу *времени можно* передавать с помощью волн? Чтобы разобраться в этом, рассмотрим следующий способ передачи информации. Известно, что любое число можно записать в двоичной системе в виде последовательности нулей и единиц. Точно так же и любую информацию можно закодировать — записать в виде последовательности сигналов и их пропусков определенной длительности. Сигналы можно передавать, используя амплитудную модуляцию (рис. 6). Чем с большей скоростью мы хотим передавать информацию, тем короче должны быть эти сигналы. Но при надежной передаче информации длительность сигнала не должна быть меньше периода несущей синусоиды. Это и даёт ограничение на скорость передачи информации. Хотите ее увеличить — увеличивайте несущую частоту. Фактически тут ется частота модуляции порядка 10^7 Гц и соответственно несущая частота должна лежать в области десятков—сотен мегагерц. Вот почему в телевидении пришлось пользоваться высокочастотными, а следовательно, и ультракороткими волнами с длиной волны порядка метра, хотя распространяются они лишь в пределах прямой видимости.

Если же для передачи информации воспользоваться светом, у которого частота колебаний 10^{15} Гц, то можно повысить скорость передачи информации на много порядков. И хотя сама по себе идея эта стара (впервые передачу звука с помощью световых сигналов осуществил изобретатель телефона Г. Белл еще в 1880 году),



«работает» уже обсуждавшееся соотношение для длительности сигнала: $\Delta t \sim 2\pi/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ становится порядка ω_0.

Например, для передачи музыкальных программ достаточно пользоваться электромагнитными волнами с частотой порядка сотен килогерц: человеческое ухо воспринимает сигналы с частотой до 20 кГц, и в этом случае интервал частот, составляющих сигнал, будет по крайней мере на порядок меньше несущей частоты. Однако для передачи телевизионных программ такие частоты уже не годятся. Изображение на экране воспроизводится 25 раз в секунду и в свою очередь состоит из десятков тысяч отдельных точек. Поэтому требуона стала технической реальностью только в наше время. Для этого должны были появиться источники монохроматического света — лазеры, специальные световоды из оптических волокон, передающие свет с очень малыми потерями, электронное оборудование для эффективной кодировки и раскодировки сигналов.

Сейчас можно с определенностью сказать, что эпоха медных проводов отошла в прошлое и развитие сверхскоростных и сверхмасштабных сетей передачи информации связано с волоконной оптикой.

О математическом творчестве школьников

В нашем журнале довольно редко появляются статьи по математике, написанные школьниками. Это не потому, что старшеклассники не способны выполнить интересную и оригинальную математическую работу. Дело здесь в том, что большинство таких работ бывают узкоспециальными, часто опираются на внепрограммный материал, редко содержат общие математические идеи, полезные для большинства наших читателей. Кроме того, текст заметки в «Кванте» должен быть не только математически корректным и формально правильным, но быть написанным доходчиво и ясно, занимательно и методически продуманно. Если наши опытные авторы не всегда справляются с такими требованиями, то что же ожидать от начинающих!

И все же в этом юбилейном, двухсотом номере журнала мы решили поместить пересказ нескольких работ школьников (присланных в «Квант» или рассказанных на различных конференциях школьников), которые, как нам кажется, должны заинтересовать многих наших читателей. В этих работах есть и нерешенные задачи для желающих проверить свои творческие силы.

Равносамопересекающиеся ломаные

В работе **Андрея Шанина** (Москва, школа № 57), написанной в 1984 году, когда Андрей учился в седьмом классе, решаются геометрические задачи о ломаных с равным количеством точек самопересечения на каждом звене. Дадим точное определение рассматриваемых ломаных: *ломаными типа* (n, m), где $n \geqslant 3$, $m \geqslant 1$, называются последовательности из n различных точек A_1, A_2, ..., A_n (*вершин*) и n последовательно соединяющих эти точки отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 (*звеньев*) таких, что каждое звено пересекают ровно m других звеньев, притом в m различных внутренних точках. Например, на рисунке 1 показаны ломаные типы (6, 1), (5, 2) и (9, 2).

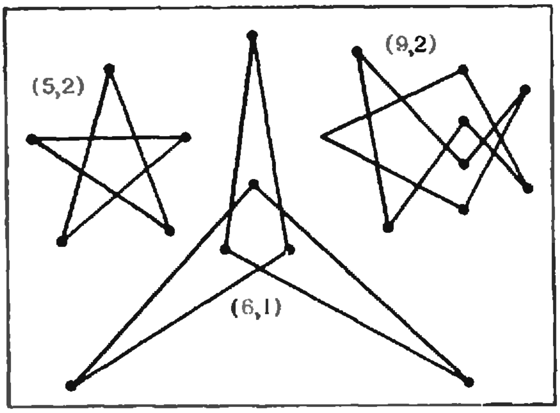


Рис. 1.

Задача 1. При каких n существует ломаная типа $(n, 1)$?

Ответ: при всех четных n ($n \geqslant 6$); для решения А. Шанин предъявляет ломаную типа (6, 1), а затем применяет к ней операцию *вставки крестика* (рис. 2, *а*) или *вставки гармошки* (рис. 2, *б*).

При нечетных же n не существует ломаных типа $(n, 1)$. Верен более общий факт: *если оба числа n и m нечетны, то ломаной типа (n, m) не существует.* В самом деле, звенья ломаной типа (n, m) пересекаются только попарно, поэтому общее число точек пересечения равно $nm/2$, что невозможно, когда оба числа n и m нечетны.

Задача 2. Верно ли, что при всяком m существует (для некоторого n) ломаная типа (n, m)?

Ответ: да; А. Шанин решает эту задачу, начиная с того же примера ломаной типа (6,1), а затем применяет к ней операцию обведения (рис. 2 *в*, *г*).

Задача 3. Для каких пар чисел (n, m) существует ломаная типа (n, m)?

Эта задача не решена до конца, хотя А. Шанин сильно продвинулся в ее решении, используя при этом разные варианты операции суммы (рис. 3). Результаты Андрея можно свести в следующую таблицу:

ломаная типа (n, m)	существует	не существует	вопрос открыт
m — четно	$n \geqslant 2m+6$ или $n = m+3$	$n \leqslant m+2$	$m+4 \leqslant n \leqslant 2m+5$
m — нечетно	n — четно и $n \geqslant 8m+12$	n — нечетно или $n \leqslant m+2$	n — четно и $m+3 \leqslant n \leqslant 8m+10$ кроме $n = 4m+6$

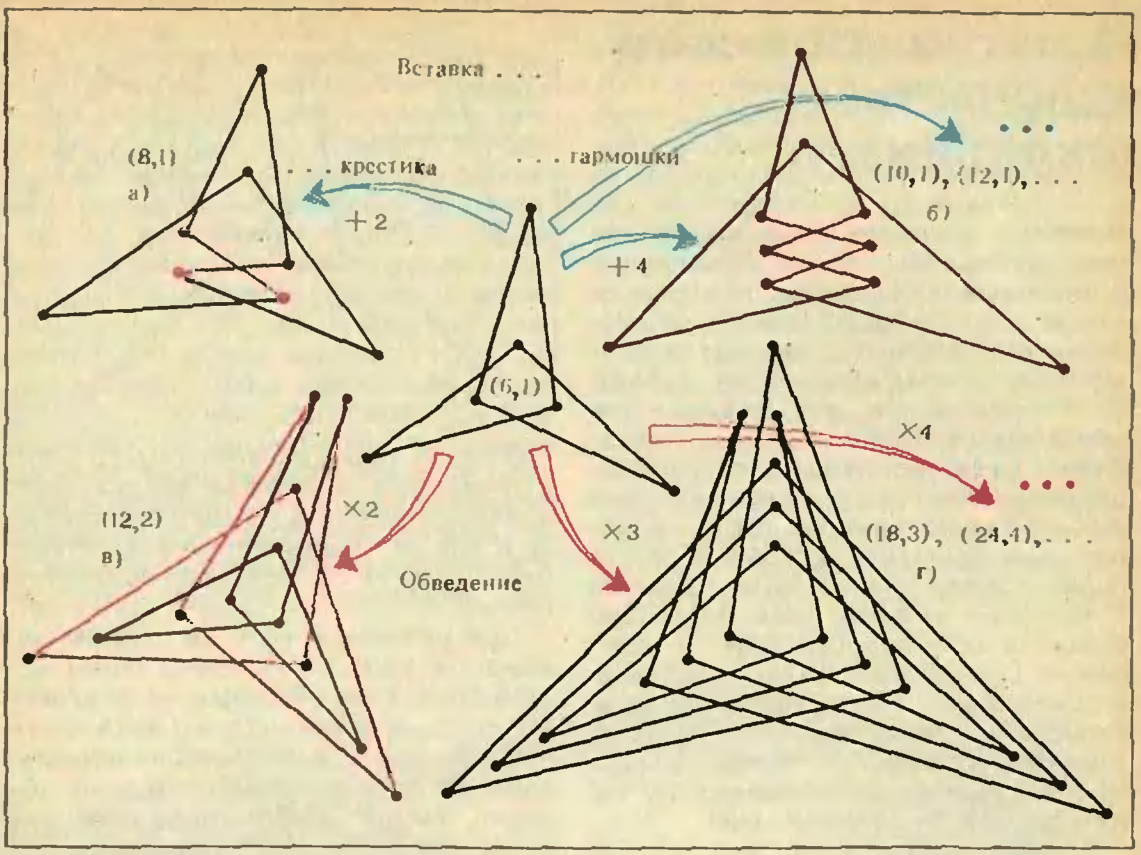


Рис. 2.

В редакции мы беседовали с А. К. Ковальджи (руководящим, вместе с Н. С. Келлиным, кружком Вечерней математической школы при МИСиСе, где занимается А. Шанин); он рассказал о некоторых других конструкциях, связанных с задачей 3, и оставил нам «таблицу белых пятен» для малых значений n и m (рис. 4). Мы надеемся, что наши читатели сумеют постепенно заполнить эти белые пятна. Отметим еще, что имеются красивые задачи о различных классификациях ломаных типа (m, n), к которым журнал «Квант» еще намерен вернуться.

Обобщенное уравнение Маркова

Многих читателей заинтересовала красивая теория, описывающая решения уравнения Маркова

$$x^2+y^2+z^2=3xyz \qquad (1)$$

в натуральных числах (x, y, z), о которой рассказывалось в статье М. Г. Крейна («Квант» 1985, № 4, с. 13). В конце этой статьи автор предлагает исследовать обобщение уравнения Маркова; на этот призыв откликнулся десятиклассник П. Вольфбейн из Киевской физико-математической школы-интерната № 2; он рассматривает уравнения вида

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=mx_1x_2\ldots x_n, \qquad (2)$$

где $n \geqslant 3$, m — натуральное число. Подобно уравнению (1), здесь также каждое решение (если оно существует) естественным образом включается в бесконечное ветвящееся *дерево решений*. Для каждого решения $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ в натуральных числах уравнения (2) по каждой его координате $a_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ можно построить *соседнее* решение $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$: под-

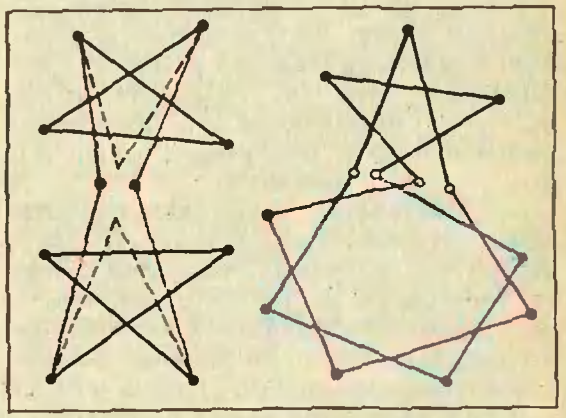


Рис. 3.

ставив в равенство (2) набор $(a_1, a_2, \ldots, x, \ldots, a_n)$, решить возникающее при этом квадратное уравнение $x^2-px+q=0$, у которого кроме корня $x=a_k$ должен быть второй корень $x=a'_k$. При этом, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $k \geqslant 2$, то $a'_k > a_1$. Таким образом, из каждого решения можно получить новые, с большей максимальной координатой, и лишь по одной координате — максимальной — переходить к соседнему, «меньшему» решению. Такое движение вверх по дереву решений к меньшим решениям не может продолжаться неограниченно, в конце концов будет достигнуто *коренное* решение $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, для которого $a'_1 \geqslant a_1$, и в дальнейшем подъем невозможен (рис. 5).

П. Вольфбейн различает *три типа коренных* решений: (I) $a_1=a_2=\ldots=a_n$; это, при $n=m$, решения вида (1, 1, ..., 1), при $n=3$, $m=1$ — решение (3, 3, 3), при $n=4$, $m=1$ — (2, 2, 2, 2); других нет.

(II) $a'_1>a_1$; например, при $n=7$, $m=5$ таково решение (2, 1, ..., 1);

(III) $a'_1=a_1$; *например, при* $n=11$, $m=5$ таково решение (4, 22, 1, ..., 1).

Рассуждения П. Вольфбейна опираются на следующую доказанную им лемму: *для коренного решения* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ *типа II или III обязательно выполняется неравенство*

$$ma_3a_4\ldots a_n<n.$$

Уравнение (2) *при* $n=m$ (как и уравнение (1), где $n=m=3$) имеет лишь одно корневое решение (1, 1, ..., 1), и из *каждого его решения* вида $a_1>a_2>\ldots>a_k>a_{k+1}=\ldots=a_n=1$ вниз выходят ветки ровно к k различным (не *получающимся друг из друга* перестановкой координат) соседним решениям. Что касается общего случая $m \neq n$, *то П. Вольфбейн получил здесь лишь некоторые частные результаты.* Задача полного исследования уравнения (2) в общем случае еще ждет своего решения.

Как продифференцировать функцию дробное число раз

Ученик 9-го класса СШ № 57 г. Москвы **Марат Ровинский** придумал, как для любого вещественного *числа* s *определить по функции* $f(x)$ новую функцию — $f^{(s)}(x)$ — таким образом, что:

1) Если s — целое неотрицательное число, то $f^{(s)}x$ — s-я производная в точке x.

2) $f^{(-1)}(x)=\int\limits_0^x f(t)dt.$

3) *Если* $f(x)=0$ при $x \leqslant 0$, то $(f^{(s_1)})^{(s_2)}(x)=f^{(s_1+s_2)}$.

Рис. 4.

Из свойств 2 и 3 следует, что если n — натуральное число, то

$$f^{(-n)}(x)=\int\limits_0^x \ldots\left(\int\limits_0^{x_2}\left(\int\limits_0^{x_1} f(t)dt\right)dx_1\right)\ldots\Big)dx_{n-1}.$$

Например,

$$f^{(-2)}(x)=\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^{x_1} f(t)dt\right)dx_1$$

— выражение в скобках рассматривается как функция от переменной x_1, по которой затем производится интегрирование.

Как известно,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

Исходным толчком для размышлений Марата послужила формула

$$f^{(2)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}.$$

Нетрудно показать (по индукции), что

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0} h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x-kh). \qquad (1)$$

Напомним («Квант», 1986, № 1, с. 23), что C_n^k — число сочетаний из n эле-

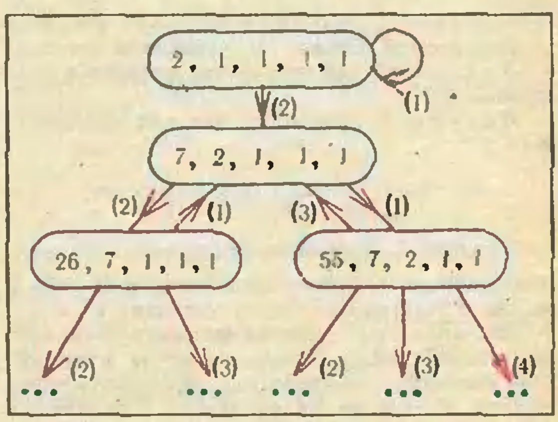


Рис. 5.

ментов по k — можно выписать по формуле

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \quad (2)$$

Заметим, что правая часть этой формулы определена при любых вещественных значениях n. Поэтому можно определить C_s^k по формуле (2) для любых s. Например, $C_{-1}^k=(-1)\times\times(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)/k!=(-1)^k$. Хотя числа C_s^k, если s — не натуральное число, уже не имеют никакой комбинаторной интерпретации, для них выполнены все основные свойства биномиальных коэффициентов.

Задача 1. Докажите, что

$$C_s^k+C_s^{k+1}=C_{s+1}^{k+1}.$$

Задача 2. Докажите, что

$$\sum_{k_1+k_2=m} C_s^{k_1}\cdot C_s^{k_2}=C_{2s}^m.$$

Указание. Любые тождества такого сорта доказываются так: левая и правая части как функции переменной s являются многочленами. Поэтому достаточно доказать, что они совпадают при натуральных значениях s.

При $s=-1$ формула (1) примет вид

$$f^{(-1)}(x)=\lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{-1}^k f(x-kh)=$$
$$=\lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh). \quad (3)$$

(В формуле (1) можно считать, что суммирование по k ведется тоже до бесконечности, ибо $C_n^k=0$ при $k>n$). Если $f(x)=0$ при $x\leqslant 0$, то формула (3) является просто определением интеграла $\int\limits_0^x f(t)dt$. В общем случае нужно разбить отрезок от 0 до x на m равных частей и устремить m к бесконечности, то есть

$$f^{(s)}(x)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^{-s}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_s^k f\times$$
$$\times\left(x-k\frac{x}{m}\right). \quad (4)$$

Тогда $(\alpha f+\beta g)^{(s)}(x)=\alpha f^{(s)}(x)+\beta g^{(s)}(x)$.

Задача 3. Докажите свойство 3.

Указание. Используйте результат задачи 2.

Задача 4. Докажите, что для натурального n

$$f^{(-n)}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Задача 5. Докажите, что при $s>1$ $(1-s)$-я производная функции, тождественно равной 1, равна $x^{s-1}/\Gamma(s)$, где $\Gamma(s)$ — функция от s.

Функция $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера — одна из важнейших математических функций. Она появляется всегда, когда необходимо определить $n!$ при не натуральных значениях n ($\Gamma(n+1)=n!$ при $n\in\mathbb{N}$). Важное свойство гамма-функции — функциональное уравнение: $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. Его легко вывести, воспользовавшись свойством 3 дробной производной.

Задача 6. Докажите, что при $s>0$

$$f^{(-s)}(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{s-1}dt. \quad (5)$$

Вопросом об обобщении понятия s-ой производной на произвольные значения s издавна занимались многие выдающиеся математики, в том числе Лейбниц, Иоганн Бернулли, Эйлер, Фурье, Лиувилль и Риман.

Определение (4), данное М. Ровинским, совпало с одним из способов, которым Лиувилль определял дробную производную в 30-х годах XIX века. Формула (5) известна как формула Римана — Лиувилля.

Общая неподвижная точка двух функций

В книге известного польского математика С. Улама «Коренные математические задачи» (М.: «Наука», 1964) имеется следующая гипотеза.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные функции, определенные на отрезке $[0;1]$, *принимающие значения, принадлежащие этому отрезку и такие, что $f(g(x))=g(f(x))$ при всех $x\in[0;1]$; тогда у функций f и g найдется общая неподвижная точка, то есть точка x_0, для которой $f(x_0)=g(x_0)=x_0$.*

Эта задача была очень популярна среди студентов-математиков в середине 60-х — начале 70-х годов, однако все попытки ее решения оказывались безуспешными. Теперь известно, что гипотеза Улама не верна: есть контрпример.

Ученик 9-го класса ФМШ-интерната № 18 при МГУ **Андрей Слепухин** по рекомендации своего учителя, кандидата физико-математических наук А. П. Веселова (кстати, выпускника ФМШ при МГУ), занялся гипотезой Улама в классе многочленов. Точнее, он решал следующую задачу.

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ два многочлена такие, что $p(q(x))=q(p(x))$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Верно ли, что существует такая точка $x_0\in\mathbb{R}$, что $p(x_0)=q(x_0)=x_0$, если известно, что сами многочлены $p(x)$ и $q(x)$ имеют неподвижные точки (это, напомним, значит, что уравнения $p(x)=x$ и $q(x)=x$ имеют корни).

Оказалось, что если хотя бы один из многочленов $p(x)$ или $q(x)$ имеет четную степень, то общая неподвижная точка существует.

Для многочленов нечетной степени доказательство А. Слепухина «не проходит», так что для них вопрос остается открытым.

Пифагоровы тетраэдры

Член корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Напомним, что треугольник называется *пифагоровым*, если у него один угол прямой, а отношение любых других сторон рационально (тогда, применяя подобие, можно из него получить прямоугольный треугольник с целыми длинами сторон). По аналогии с этим будем называть тетраэдр *пифагоровым*, если его плоские углы при одной из вершин прямые, а отношение любых двух ребер рационально (из него с помощью подобия можно получить тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин и целыми длинами ребер).

В этой заметке мы выведем «уравнение пифагоровых тетраэдров», то есть такое уравнение с тремя неизвестными ξ, η, ς, что любой пифагоров тетраэдр дает рациональное решение этого уравнения, и наоборот, любое рациональное решение уравнения дает пифагоров тетраэдр. А затем, пользуясь этим уравнением, найдем конкретные примеры пифагоровых тетраэдров.

Пифагоровы треугольники

Сначала дадим способ описания всех пифагоровых треугольников. На рисунке 1 треугольник OAB — прямоугольный; длины его катетов обозначены через a и b, а длина гипотенузы — через p (букву e резервируем для дальнейшего). Число

$$\xi=\frac{a}{b+p} \qquad (1)$$

условимся называть *параметром* прямоугольного треугольника OAB (или, точнее, параметром «относительно катета a»). Используя соотношение $p^2=a^2+b^2$, имеем

$$1+\xi^2=\frac{(b^2+2bp+p^2)+a^2}{(b+p)^2}=\frac{2p^2+2bp}{(b+p)^2}=\frac{2p}{b+p},$$

$$1-\xi^2=\frac{(b^2+2bp+p^2)-a^2}{(b+p)^2}=\frac{2b^2+2bp}{(b+p)^2}=\frac{2b}{b+p}.$$

Из этих равенств непосредственно получаем формулы, выражающие отношения сторон прямоугольного треугольника через его параметр:

$$\frac{2\xi}{1-\xi^2}=\frac{a}{b},\quad \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}=\frac{p}{b}. \qquad (2)$$

Задача 1. Пусть α — величина угла OAB. Докажите, что параметр ξ треугольника OAB равен $\operatorname{tg}\alpha/2$, и дайте с помощью этого другое доказательство формул (2).

Задача 2. Докажите, что параметр ξ' треугольника OAB относительно катета b (то есть $\xi'=\frac{b}{a+p}$) связан с параметром ξ соотношением $\xi'=\frac{1-\xi}{1+\xi}$. Дайте интерпретацию этого соотношения с помощью тригонометрических функций (см. задачу 1).

Из формул (1) (2) непосредственно вытекает следующее утверждение: *для того чтобы прямоугольный треугольник был пифагоровым, необходимо и достаточно, чтобы число ξ было рациональным.* В самом деле, если треугольник пифагоров, то из (1) следует, что ξ рационально. Обратно, если ξ рационально, то согласно (2) отношения сторон рациональны, то есть треугольник пифагоров.

Уравнение пифагоровых тетраэдров

Пусть теперь $OABC$ — тетраэдр, у которого плоские углы при вершине O прямые. Длины ребер, исходящих из вершины O, обозначим через a, b, c, а длины трех других ребер — через p, q, r (рис. 2). Рассмотрим параметры трех прямоугольных треугольников OAB, OBC, OCA:

$$\xi=\frac{a}{b+p},\quad \eta=\frac{b}{c+q},\quad \varsigma=\frac{c}{a+r}. \qquad (3)$$

Тогда по формулам (2) можно выразить отношения сторон этих прямоугольных треугольников через их параметры:

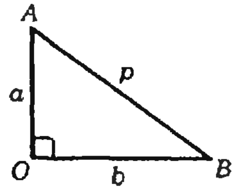


Рис. 1.

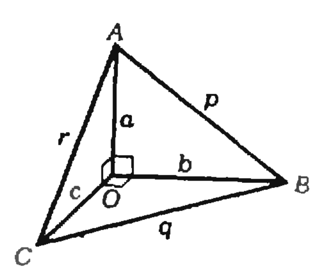


Рис. 2.

$$\frac{a}{b}=\frac{2\xi}{1-\xi^2},\ \frac{b}{c}=\frac{2\eta}{1-\eta^2},\ \frac{c}{a}=\frac{2\zeta}{1-\zeta^2};\qquad (4)$$

$$\frac{p}{b}=\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2},\ \frac{q}{c}=\frac{1+\eta^2}{1-\eta^2},\ \frac{r}{a}=\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}.\qquad (5)$$

Из (4) непосредственно вытекает, что параметры ξ, η, ζ удовлетворяют соотношению

$$\frac{2\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{2\eta}{1-\eta^2}\cdot\frac{2\zeta}{1-\zeta^2}=1.\qquad (6)$$

Это и есть обещанное «уравнение пифагоровых тетраэдров».

Задача 3. Докажите, что если три положительных числа ξ, η, ζ, каждое из которых меньше единицы, удовлетворяют уравнению (6), то существует тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин, для которого (при обозначениях рисунка 2) справедливы равенства (3) (а потому и равенства (4), (5)).

Задача 4. Докажите, что если ξ, η, ζ — решение неопределенного уравнения (6), то числа

$$\xi'=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \eta'=\frac{1-\eta}{1+\eta},\ \zeta'=\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$$

также составляют решение этого уравнения («сопряженное решение»). Докажите, что если каждое из чисел ξ, η, ζ положительно и меньше 1, то и каждое из чисел ξ', η', ζ' обладает этим свойством. Каково геометрическое взаимоотношение двух сопряженных решений уравнения (6)?

Задача 5. Докажите, что если ξ, η, ζ — решение неопределенного уравнения (6), причем каждое из чисел ξ, η, ζ положительно и меньше 1, то тетраэдр *OABC*, о котором говорится в задаче 3, может быть получен следующим образом: из точки *O* проводятся три взаимно перпендикулярных отрезка *OA*, *OB*, *OC*, имеющих длины

$$OA=1,\ OB=\frac{1-\xi^2}{2\xi},\ OC=\frac{1-\xi^2}{2\xi}\cdot\frac{1-\eta^2}{2\eta}.$$

Задача 6. Числа ξ, η, ζ составляют решение неопределенного уравнения (6). Возможно ли, чтобы два из этих чисел были рациональными, а третье иррациональным? Дайте геометрическую интерпретацию ответа.

Задача 7. Числа ξ, η, ζ составляют рациональное решение неопределенного уравнения (6), причем каждое из них положительно и меньше 1. Докажите, что если $\xi=m/n$, $\eta=p/q$ (где m, n, p, q — натуральные), то тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин и длинами выходящих из этой вершины ребер

$$a=4mnpq,\ b=2pq=(n^2-m^2),$$
$$c=(n^2-m^2)(q^2-p^2)$$

является пифагоровым.

Из формул (3)—(5) непосредственно вытекает следующее утверждение: *для того чтобы тетраэдр OABC с прямыми плоскими углами при вершине O был пифагоровым, необходимо и достаточно, чтобы параметры ξ, η, ζ (удовлетворяющие уравнению (6)) были рациональными.* В самом деле, если тетраэдр пифагоров (то есть отношение любых двух его ребер рационально), то из (3) следует, что ξ, η, ζ рациональны. Обратно, если ξ, η, ζ рациональны, то согласно (4), (5) отношение любых двух ребер рационально, то есть тетраэдр пифагоров.

Поиск пифагоровых тетраэдров

Мы видим, что задача нахождения пифагоровых тетраэдров алгебраически равносильна задаче нахождения **рациональных** решений неопределенного уравнения (6) при условиях $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, $0<\zeta<1$. Легко убедиться прямой проверкой, что следующие тройки являются решениями.

Таблица 1.

	ξ	η	ζ
1)	5/6	2/11	3/13
2)	5/8	1/11	9/13
3)	1/7	9/11	5/16
4)	5/6	6/11	1/17
5)	8/9	1/11	5/17
6)	2/5	5/11	7/18
7)	3/4	1/10	11/21
8)	2/13	17/22	9/25
9)	3/7	3/8	11/25
10)	21/23	1/24	11/25
11)	7/18	1/22	23/25

Это дает возможность найти одиннадцать пифагоровых тетраэдров. Для вычисления длин их ребер можно воспользоваться методом задачи 7 (производя, если нужно, сокращение на общий множитель). Ребра этих тетраэдров перечислены в таблице 2.

Заметим еще, что если пифагоров тетраэдр *OABC* дополнить до параллелепипеда с ребрами *OA*, *OB*, *OC*, то получится «пифагоров» паралле-

Таблица 2.

	a	b	c	p	q	n
1)	1100,	1155,	1008,	1595,	1533,	1492;
2)	252,	240,	275,	348,	365,	373;
3)	720,	132,	85,	732,	157,	725;
4)	1584,	187,	1020,	1595,	1037,	1884;
5)	240,	44,	117,	244,	125,	267;
6)	880,	429,	2340,	979,	2379,	2500;
7)	231,	792,	160,	825,	808,	281;
8)	480,	140,	693,	500,	707,	843;
9)	3536,	11220,	2925,	11764,	11595,	4589;
10)	5796,	528,	6325,	5820,	6347,	8579;
11)	1008,	1100,	12075,	1492,	12125,	12117.

лепипед, то есть прямоугольный параллелепипед с рациональными (или целыми) длинами всех ребер и всех диагоналей граней. На рисунке 3 показан параллелепипед, получающийся таким образом с помощью второго из приведенных выше пифагоровых тетраэдров. Однако диагональ этого параллелепипеда имеет иррациональную длину. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра, все диагонали граней и диагональ всего параллелепипеда имеют целые длины, неизвестно.

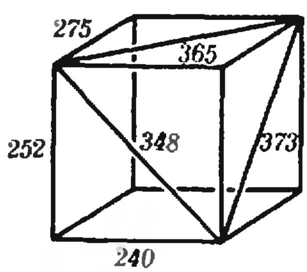


Рис. 3.

Задача 8. Докажите, что десять из приведенных одиннадцати решений уравнения (6) являются попарно сопряженными (в смысле определения, приведенного в задаче 4). Найдите решение, «сопряженное» к одиннадцатому решению; найдите соответствующий пифагоров параллелепипед.

Задача 9. Назовем прямоугольный параллелепипед «пифагоровым параллелепипедом второго рода», если все его ребра, а также диагональ параллелепипеда имеют рациональные длины. Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — длины ребер прямоугольного параллелепипеда, а y — длина его диагонали, то он в том и только в том случае является пифагоровым параллелепипедом второго рода, если оба числа («параметры»)

$$\xi_1=\frac{x_1}{x_3+y},\quad \xi_2=\frac{x_2}{x_3+y}$$

рациональны. Докажите, что для этого параллелепипеда справедливы соотношения

$$\frac{x_1}{y}=\frac{2\xi_1}{1+\xi_1^2+\xi_2^2},\quad \frac{x_2}{y}=\frac{2\xi_2}{1+\xi_1^2+\xi_2^2},$$

$$\frac{x_3}{y}=\frac{1-\xi_1^2-\xi_2^2}{1+\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Задача 10. Обобщая результат задачи 9, докажите, что любое рациональное решение неопределенного уравнения

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y^2$$

имеет вид

$x_1=k\cdot 2\xi_1$, $x_2=k\cdot 2\xi_2$, ..., $x_{n-1}=k\cdot 2\xi_{n-1}$, $x_n=k(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_{n-1}^2)$, $y=k(1+\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2)$, где ξ_1, ..., ξ_{n-1} — произвольные рациональные числа («параметры») и коэффициент k также рационален. Можете ли вы дать геометрическую интерпретацию этого результата?

Задача 11. Обобщите результат задачи 10 на неопределенное уравнение

$$x_1^2+\ldots+x_p^2=y_1^2+\ldots+y_q^2$$

(то есть дайте формулы для нахождения всех рациональных решений).

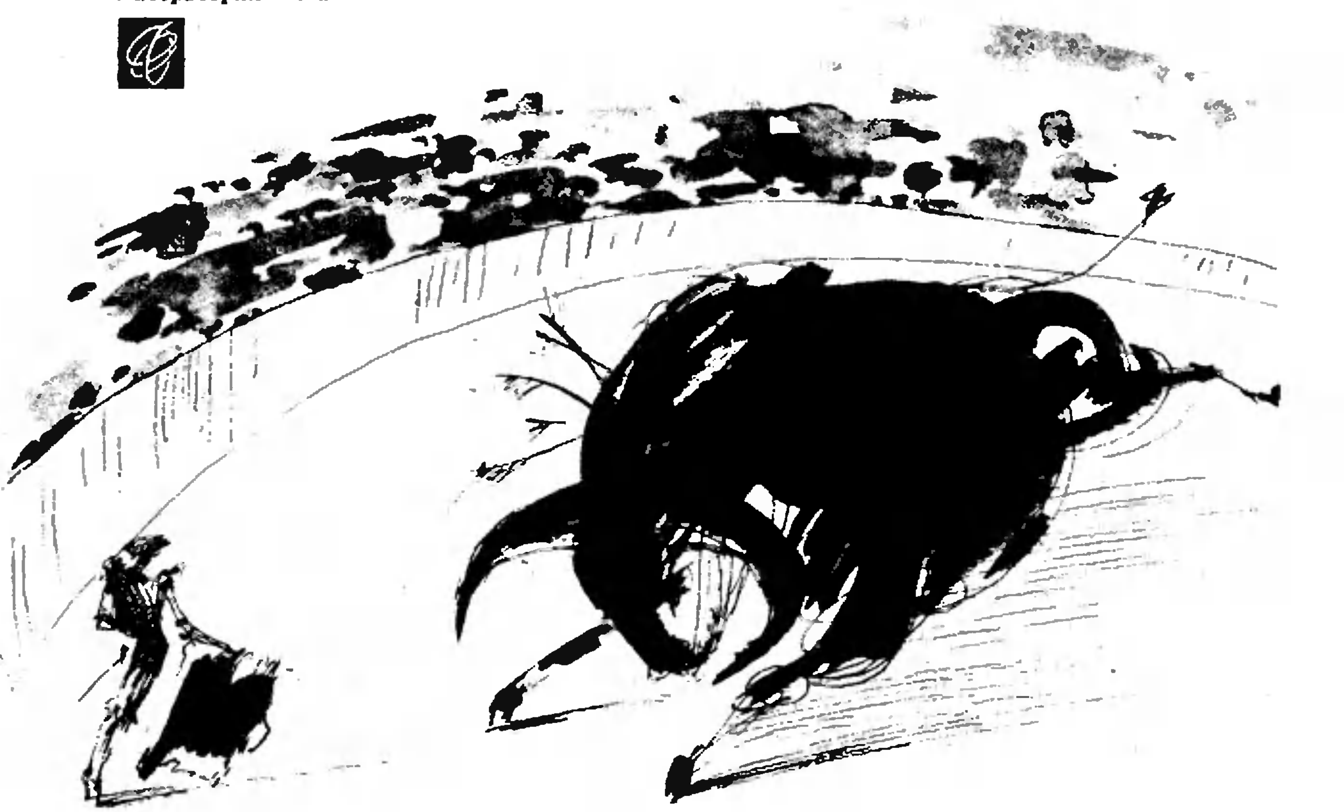
* * *

В заключении остановимся на вопросе о том, как были найдены указанные выше 11 рациональных решений уравнения (6). Для этого была использована электронная вычислительная машина. Алгоритм для вычислений на ЭВМ был составлен на основе следующих соображений. Пусть

$$\xi=\frac{a}{b},\quad \eta=\frac{c}{d},\quad \zeta=\frac{e}{f},\qquad (7)$$

где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Идея алгоритма — перебирать все такие шестерки, придавая каждому из шести чисел значения 1, 2, ..., 25, по формулам (7) найти соответствующие тройки (ξ, η, ζ) и из них отобрать те, которые удовлетворяют уравнению (6). В действительности целесообразнее, освободившись от знаменателей, вести вычисления не с ξ, η, ζ, а с натуральными числами a, b, c, d, e, f. Дело в том, что при работе с рациональными числами ξ, η, ζ компьютер заменил бы их некоторыми десятичными приближениями, которые точно не удовлетворяли бы уравнению (6).

Задача 12. Напишите алгоритм на учебном алгоритмическом языке. Попробуйте его усовершенствовать, чтобы избежать (на самом деле ненужного) полного перебора всех шестерок a, b, c, d, e, f.



Оранжевое небо

Кандидат физико-математических наук
Г. И. КОСОУРОВ

В этой статье мы предлагаем несколько опытов по цветовому зрению. Все они связаны с различными цветовыми иллюзиями, вызванными необычными условиями работы глаза или его цветовым утомлением.

Механизм восприятия цветов глазом очень сложен и до конца еще не изучен. Известно, что сетчатка глаза содержит два рода светочувствительных клеток, которые носят название палочек и колбочек. В палочках содержится фотохимически чувствительный пигмент — зрительный пурпур, или родопсин. Под действием света родопсин обесцвечивается и действует на нервные волокна, передающие возбуждение в мозг. При ярком свете он обесцвечивается полностью и палочки слепнут. В темноте идет обратный процесс — восстановление зрительного пурпура. Палочковое сумеречное зрение обладает очень большой чувствительностью, но оно ахроматично: палочки не чувствуют цвета.

При достаточно большой яркости вступает в силу колбочковый механизм зрения. Колбочковое зрение цветочувствительно. Есть много убедительных опытов, приводящих к выводу, что колбочки содержат фотохимически чувствительные пигменты трех сортов с максимумом чувствительности в красной, зеленой и синей областях спектра. Различная степень выцветания всех трех пигментов дает в нашем сознании ощущение цвета и позволяет видеть мир во всем разнообразии красок, оттенков, полутонов и переходов.

На трехцветной природе цветового зрения основано воспроизведение цветов в кино, в телевидении, в цветной фотографии и в полиграфии. Методы количественного измерения цветов также основаны на трехцветном принципе.

Однако ощущение цвета можно вызвать не только красками, но и, например, прерывистым освещением. Перечертите тушью на чертежную бумагу черно-белые диски, показанные на рисунке 1 (*а*, *б*, *в*, *г*). Достаточ-

Эта статья впервые была опубликована в «Кванте» № 11 за 1970 год.

но, чтобы диски *имели диаметр* 8—12 см. Вырежьте диски и приведите их в не очень быстрое вращение, примерно 1—3 оборота в секунду. Для этого можно надеть их на ось наматывателя кинопроектора, проигрывателя, магнитофона или просто сделать из дисков волчки. Вместо черных дуг вы увидите *цветные* окружности. Окраска зависит от скорости вращения, освещенности и характера рисунка. Например, у диска на рисунке 1, *а* дуги, следующие за черным сектором (по направлению вращения), при слабом освещении кажутся красными, а при ярком — желтыми. При некоторой *скорости* вращения и ярком освещении черные секторы кажутся синими. Полного объяснения этому явлению пока еще нет.

Краски различаются не только цветом, но и насыщенностью. Если постепенно добавлять к красной краске белила, цвет будет становиться все более *розовым*. На картинах и тем более на типографских копиях с картин трудно получить насыщенные тона и большие *градации яркости*. Отношение яркости самой белой краски к яркости самой черной едва достигает ста, а в природе мы имеем дело с различием в яркости во много тысяч раз. Поэтому копии с картин кажутся слишком бледными либо, наоборот, слишком темными. Это нарушает один из *элементов* восприятия объемности — воздушную перспективу. Изображение пейзажа или жанровой сцены выглядит плоским. *Значительно* шире диапазон передаваемых яркостей при проекции на экран диапозитивов. Именно поэтому так выразительны и объемны фотографии на *цветной обратимой* пленке — слайды.

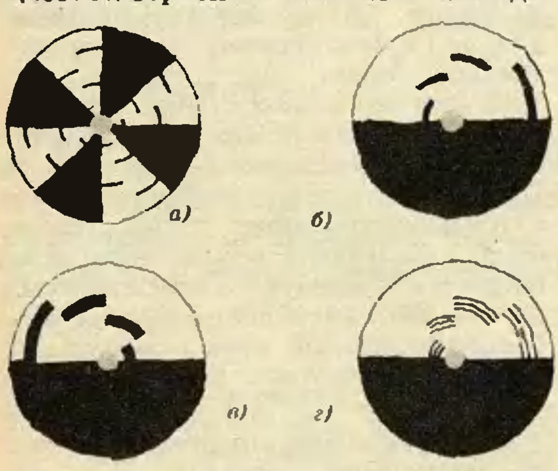


Рис. 1.

Рис. 2.

Восприятие картины можно значительно улучшить, освещая ее специальным образом. Возьмите цветную вклейку из «Огонька», сфотографируйте *ее* и *отпечатайте* контактным способом с пленки на пленку контрастный черно-белый диапозитив. Вставьте диапозитив в *проектор* с большим световым потоком (подойдет проектор типа «Свет») и спроектируйте диапозитив на оригинал так, чтобы контуры проекции и оригинала *точно совпадали*. Результат не заставит вас пожалеть о затраченном труде. Картина оживет, приобретет объемность и особую *выразительность*. Выключите проектор, и вы убедитесь, насколько тускла и невыразительна картина при равномерном освещении.

Следующие опыты относятся к так *называемым* последовательным цветовым образам. Это явление связано с тем, что полное восстановление цветочувствительного *пигмента* — процесс сравнительно медленный. Если продолжительное время смотреть на одноцветный рисунок, а *потом* переведи взгляд на белую бумагу, стену или потолок, то белый цвет будет восприниматься так, как будто в нем недостает цвета, утомившего глаз. *На белой поверхности* будет виден тот же рисунок, но окрашенный в цвет, который называют дополнительным.

Вырежьте из цветной *бумаги* красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий и фиолетовый квадратики размером 2×2 см. Положите один из цветных квадратиков перед собой на *лист* белой бумаги и смотрите на него, не напрягая глаз, секунд тридцать. Смотреть надо, как говорят, в одну точку, чтобы *изображение* квадрата не перемещалось по сетчатке. Переведите взгляд на белое поле, и через секунду — две вы увидите *на бумаге* четкое изображение квадрата в дополнительном цвете. Так вы узнаете, что дополнительным к красному цвету является зеленый, к синему — оранже-

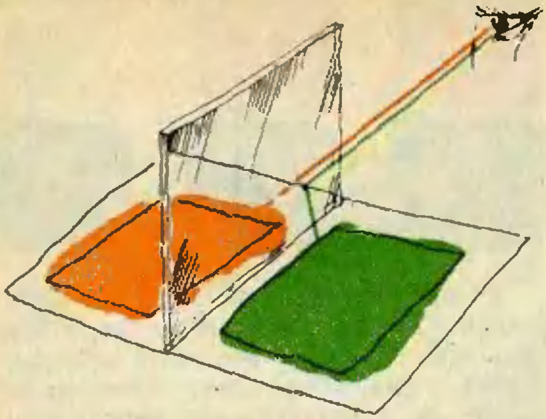


Рис. 3.

вый, а к желтому — фиолетовый (рис. 2). Каждая пара дополнительных цветов в смеси должна давать белый или серый ахроматический цвет.

Для смешения дополнительных цветов положите рядом два дополнительных квадратика и поставьте между ними стеклянную пластинку (рис. 3). Расположите глаз так, чтобы один квадратик видеть сквозь стекло, а другой — отраженным в стекле. Меняя наклон стекла и тем самым соотношение между световыми потоками, идущими от квадратиков, можно добиться того, что окраска в месте перекрытия изображений почти исчезнет. Для полной ахроматизации изображения нужен точный подбор цветов. Чаще всего получается бурая окраска. Но если взять два явно не дополнительных цвета, например зеленый и желтый или красный и фиолетовый, яркая окраска получится при любой их смеси. Еще более яркие цветовые образы возникают, если квадратики класть не на белую бумагу, а на дополнительный фон.

После того как вы приобрели опыт наблюдения на простых фигурах, попробуйте сделать из цветной бумаги аппликацию — например, изобразите пейзаж, заменив в нем все цвета на дополнительные. Рассматривая картинку так же, как рассматривали квадратики, вы очень скоро научитесь видеть на белом фоне пейзажи в натуральных цветах. Для успеха нужно только достаточно яркое освещение.

Самую поразительную и самую непонятную цветовую иллюзию дает наш последний опыт. Мы уже говорили, что в основе воспроизведения цветов лежит трехцветная система. Если три раза сфотографировать одну и ту же сцену через три светофильтра — красный, зеленый и синий — и, отпечатав позитивные копии, спроектировать их тремя проекторами на одно и то же место экрана через те же светофильтры, то на экране появится цветное изображение с правильной передачей цветов. При этом светофильтры должны быть подобраны так, чтобы в сумме они давали белый цвет. Можно ограничиться двумя фотографиями через два дополнительных светофильтра, например красный и зеленый. При этом тоже получается хорошая цветопередача, хотя и не столь совершенная, как в трехцветном способе. Но, оказывается, при проекции можно ограничиться и одним цветным светофильтром.

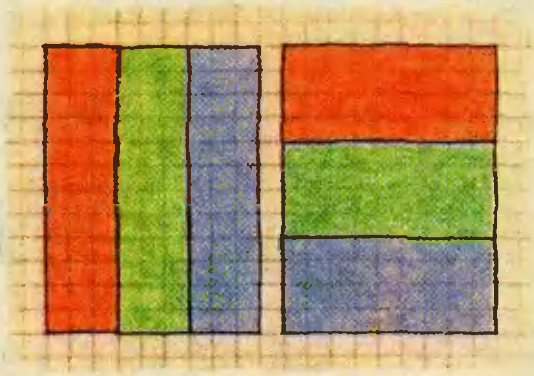
Снимите одну и ту же цветную сцену, не перемещая аппарат, два раза на панхроматическую пленку через красный и зеленый светофильтры. В точном подборе светофильтров нет необходимости. Вполне подойдут светофильтры из школьного набора. Контактно отпечатайте на пленку позитивные копии. Полученные диапозитивы вставьте в два проектора и спроектируйте диапозитивы на экран так, чтобы контуры изображений точно совпали. Перед объективом проектора, в который вставлен диапозитив, снятый через красный фильтр, поставьте красный светофильтр, а второе изображение оставьте черно-белым. Вы увидите цветное изображение во всем богатстве красок, несмотря на то, что проектируете вы только красное и черно-белое изображения с разным распределением света и тени. Любые объективные исследования света, отраженного разными местами экрана, дадут только красный цвет различной степени чистоты или насыщенности. Ощущение цветов в данном случае чисто субъективное. Проекторы лучше включать через автотрансформаторы, чтобы можно было независимо регулировать освещенность, даваемую на экран каждым из них. Как правило, ощущение наиболее правильной цветопередачи возникает при небольшой освещенности экрана.

Таким образом, простое и очевидное полно тайн и загадок.

Квант для младших школьников

Задачи

1. Белых грибов я после дождя набрал — насилу дотащил,— рассказывал на уроке математики Николай Борисович.— Но тащил я главным образом воду: ведь в свежесобранных грибах 90 % воды! А когда грибы подсохли, их вес уменьшился на 15 кг, потому что вода составляла теперь только 60 % их веса. Сколько килограммов грибов я принес из леса?



2. На рисунке изображены два прямоугольника 9×12, раскрашенные по-разному в три цвета. Разрежьте прямоугольник, нарисованный слева, на 4 части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник, нарисованный справа.

3. Коля и Витя живут в одном доме. На каждом из этажей во всех подъездах их дома расположено по четыре квартиры. Коля живет на пятом этаже в квартире № 83, а Витя — на третьем этаже в квартире № 169. Сколько этажей в их доме?

4. Мы с Ирой пошли в лес за ягодами. Ира шла правее меня. Вдруг слева я услышал ее «Ау!», через минуту — снова «Ау!», но уже, кажется, сзади. Почему в лесу так трудно определить направление на источник звука?

5. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли в таком случае воткнуть булавку так, чтобы она проколола все листы?

Эти задачи нам предложили *А. Я. Халамайзер, А. В. Швецов,* ученик 10 кл. школы № 462 г. Москвы *А. Хамитдулин, А. П. Савин, В. В. Произволов.*

КТО УКРАЛ

Крендели?

Червонный Король и Королева сидели на троне, а вокруг толпились остальные карты и множество всяких птиц и зверюшек. Перед троном стоял Валет в цепях. Возле Короля вертелся Белый Кролик — в одной руке он держал трубку, а в другой длинный пергаментный свиток. Посередине стоял стол, а на столе большое блюдо с кренделями. «Скорее бы кончили судить,— подумала Алиса,— и подали угощение». Особых надежд на это, однако, не было, и она начала смотреть по сторонам, чтобы как-то скоротать время. «Вон судья,— сказала Алиса про себя.— Раз в парике, значит судья». Судьей, кстати, был сам Король. «Это место для присяжных,— подумала Алиса. А эти двенадцать существ, видно, и есть присяжные». Присяжные меж тем что-то строчили на грифельных досках. «Воображаю, что они там понапишут до конца суда!»,— подумала Алиса. У одного из присяжных грифель все время скрипел. Алиса ловко выхватила у него грифель. Она проделала это так быстро, что бедный присяжный не понял, что произошло; поискав грифель, он решил писать пальцем. Толку от этого не было никакого, так как палец не оставлял следа на грифельной доске.— Глашатай, читай обвинение! — сказал Король. Белый Кролик трижды протрубил в трубу, развернул пергаментный свиток и прочитал: Дама Червей испекла кренделей в летний погожий денек. Валет Червей был всех умней и семь кренделей уволок.— Обдумайте свое решение! — сказал Король присяжным.— Нет, нет,— прервал его Кролик.— Надо, чтобы все было по правилам.— Вызвать первого свидетеля,— строго приказал Король. Им оказался Болванщик.

Он подошел к трону, держа в одной руке чашку с чаем, а в другой бутерброд. Королева надела очки и в упор посмотрела на Болванщика.— Давай показания,— сказал Король.— И не нервничай, а не то я велю тебя казнить. Алиса почувствовала себя странно. Она не могла понять, что

А ты не можешь не напирать?— спросила сидевшая рядом с ней Соня.— Ничего не могу поделать,— виновато сказала Алиса.— Я расту. А Королева меж тем все смотрела в упор на Болванщика, она нахмурилась и приказала:— Подать сюда список тех, кто пел на последнем концерте! Тут бедный Болванщик так задрожал, что с обеих ног у него слетели башмаки.— Давай свои показания,— повторил Король гневно,— а не то я велю тебя казнить. Несчастный Болванщик выронил из рук чашку и бутерброд.— Я человек маленький,— сказал он.— Глуп как пень,— заметил Король и гордо огляделся. Тут одна из морских свинок громко зааплодировала и была подавлена. (Это трудное слово, и я объясню, что оно значит. Служители взяли большой мешок; сунули туда свинку вниз головой, завязали мешок и сели на него).— Я очень рада, что увидела, как это делается,— подумала Алиса.— А то я часто читала в газетах: «Попытки к сопротивлению были подавлены...» Теперь-то я знаю, что это такое!— Ну, хватит,— сказал Король Болванщику. Закругляйся!— А я и так весь круглый,— радостно возразил Болванщик.— Круглый ты болван, вот ты кто! — закричал вдруг Король. Тут другая свинка зааплодировала и была подавлена. «Ну вот, со свинками покончено,— подумала Алиса.— Теперь дело пойдет веселее». И Болванщик выбежал из зала суда, даже не позаботившись надеть башмаки.— И отрубите ему голову,— прибавила Королева, повернувшись к одному из служителей. Но Болванщик был уже далеко.— Вызвать свидетельницу, и чтобы вела себя прилично,— приказал Король.— Придется Вашему Величеству подвергнуть ее перекрестному допросу,— прошептал Кролик. Белый Кролик зашуршал списком. «Интересно, кого они сейчас вызовут,— подумала Алиса. Пока что улик у них нет никаких...» Представьте себе ее удивление, когс ней происходит. Наконец ее осенило: она опять

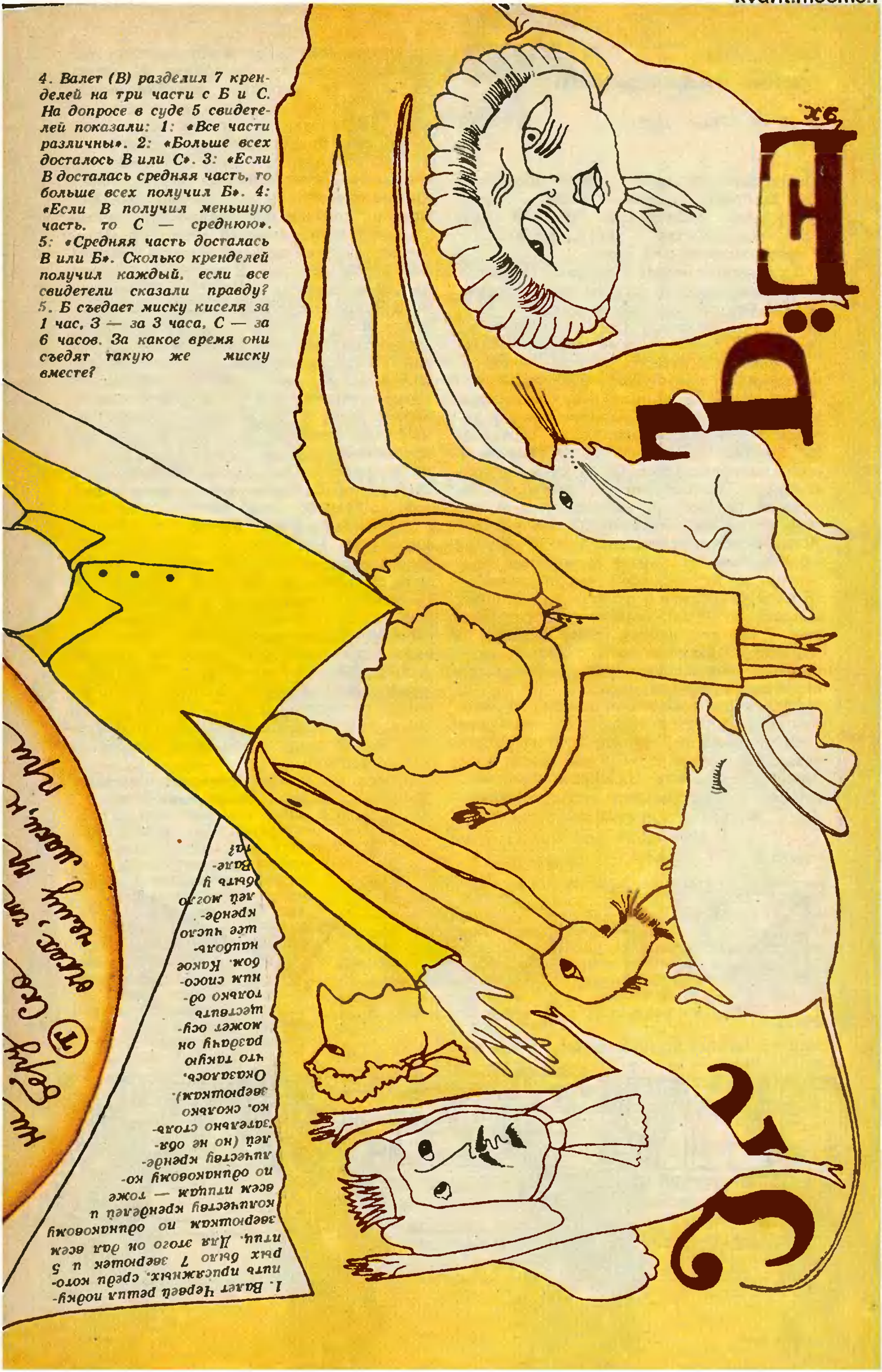
РОС-ЛА!

да Белый Кролик завопил своим голоском:

АЛИ-СА!

2. Болванщик купил материал для шляпы за 5 монет, а шляпу продал за 6 монет, затем купил ее за 7 монет и снова продал за 8 монет, потом купил ее же за 9 монет и тут же продал за 10 монет. Какую прибыль он получил?

3. До того, как Алиса начала расти в зале суда, ее вес и рост были равны весу и росту каждого из присяжных заседателей. Когда же она выросла, то стала весить столько же, сколько все 12 присяжных вместе. Во сколько раз выросла Алиса?



1. Валет Червей решил подкупить присяжных, среди которых было 7 зверюшек и 5 птиц. Для этого он дал всем зверюшкам по одинаковому количеству кренделей и всем птицам — тоже по одинаковому количеству кренделей (но не обязательно столько, сколько зверюшкам). Оказалось, что такую раздачу он может осуществить только одним способом. Какое наибольшее число кренделей могло быть у Валета?

4. Валет (В) разделил 7 кренделей на три части с Б и С. На допросе в суде 5 свидетелей показали: 1: «Все части различны». 2: «Больше всех досталось В или С». 3: «Если В досталась средняя часть, то больше всех получил Б». 4: «Если В получил меньшую часть, то С — среднюю». 5: «Средняя часть досталась В или Б». Сколько кренделей получил каждый, если все свидетели сказали правду?

5. Б съедает миску киселя за 1 час, З — за 3 часа, С — за 6 часов. За какое время они съедят такую же миску вместе?

Неудачи одной цивилизации

А. Н. КЮЧУКОВ (НРБ)

На Отрезке AB существовала цивилизация. Ее представители — Точки — были разумными существами. Отрезок был большой, существа — очень маленькие; и места хватало для всех.

С развитием науки и техники существа начали обдумывать вопрос: как покинуть родной Отрезок и выйти в открытый Космос — в Плоскость? Сначала нашли середину C Отрезка. Самые видные ученые предложили построить в Плоскости равнобедренные прямоугольные треугольники AA_0C и BB_0C с прямыми углами при вершинах A и B. Они нашли способ послать космический корабль в середину M_0 отрезка A_0B_0 (рис. 1). Этот проект приняли с восторгом, но он чуть не провалился. Равнобедренные треугольники строили разные организации и они построили их несогласованно — в разных Полуплоскостях относительно Отрезка AB. Поэтому вместо того чтобы взлететь в точку M_0, космический корабль остался в середине C отрезка AB. Ошибку исправили, и для определенности существа решили летать пока только в Верхнюю Полуплоскость. Космический корабль успешно долетел до точки M_0, и все были довольны.

Следующее поколение, однако, не захотело ограничиться точкой M_0. Молодые ученые заменили середину C Отрезка произвольной точкой C', $C' \in AB$, после чего снова построили в Плоскости равнобедренные прямоугольные треугольники $AA'C'$ и $BB'C'$ с прямыми углами при вершинах A и B. Затем они послали космический корабль в середину M' отрезка $A'B'$ (в Верхнюю Полуплоскость; рис. 2). Каково же было их удивление, когда оказалось, что корабль снова попал в точку M_0. Большинство ученых решили, что это совпадение является неизбежным свойством Плоскости. Они начали искать другие способы выхода в открытый Космос при помощи равнобедренных прямоугольных треугольников (наверное, технические средства цивилизации не позволяли других методов). В конце концов удалось использовать точку C_1 в Плоскости, не лежащую на Отрезке AB. Вне треугольника ABC_1 построили равнобедренные прямоугольные треугольники AA_1C_1 и BB_1C_1 с прямыми углами при вершинах A и B (рис. 3). Было много предложений, аргументированных по-разному, как выбирать точку C_1 в Плоскости. Однако самый закостенелый скептик заявил, что споры беспредметны, потому что середина M_1 отрезка A_1B_1, куда пойдет космический корабль, и в этом случае совпадает со старой точкой M_0.

Его слова были восприняты как неуместная шутка. Цивилизация выделила большие денежные средства, чтобы опровергнуть скептика практически. Выбрали две различные точки C_1 и C_2 в Верхней Полуплоскости, построили соответствующие прямоугольные треугольники. Потом послали два корабля в середины M_1 и M_2 полученных отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Только виртуозное мастерство пилотов спасло корабли от столкновения! Скептик же заявил, что корабли избежали столкновения только из-за неточности построения треугольников.

А что думаете вы, дорогие читатели? Почему произошло совпадение точек M_0, M', M_1 и M_2?

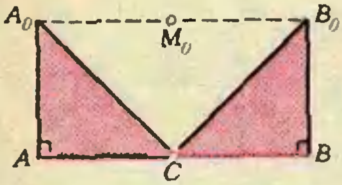


Рис. 1.

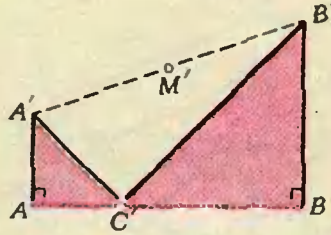


Рис. 2.

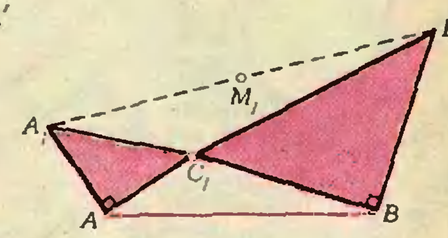
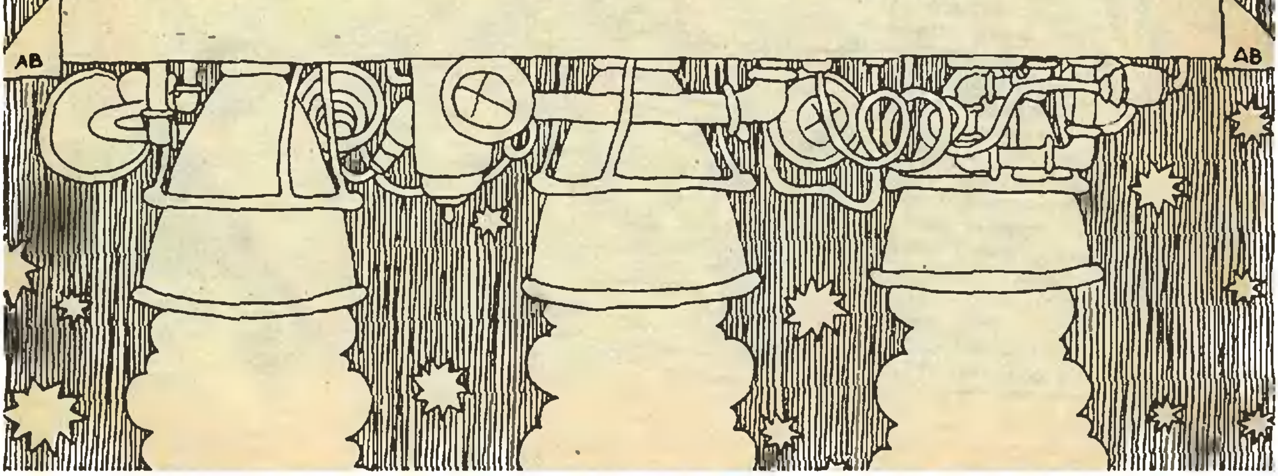


Рис. 3.



задачник Кванта

M996—M1000; Ф1008—Ф1012

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M996, M997» или «Ф1008». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

Задачи M996 — M998 и M999 а) этого номера предлагались на XX Всесоюзной математической олимпиаде школьников. Полный список задач этой олимпиады с решениями будет опубликован в «Кванте» № 11 за этот год.

M996. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

В. В. Произволов

M997. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m и n — натуральные числа, $1\leqslant m<n<1986$, не является целым числом.

Д. А. Митькин

M998*. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов четырехугольника $AXBY$, то есть сумма

$$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.

И. Ф. Шарыгин

M999*. а) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Докажите, что константу 4 в правой части неравенства

б) можно заменить на 2;

в) нельзя заменить числом, меньшим 2.

Л. Д. Курляндчик, А. С. Меркурьев

Редакция получила много задач по математике с пометкой «На конкурс M1000». Среди них было немало интересных — со временем они будут опубликованы в «Задачнике «Кванта». Однако авторитетное жюри не сумело выбрать какую-нибудь одну задачу, явно выделяющуюся среди остальных. Тогда жюри обратило внимание на сравнительно малоизвестную задачу, до сих пор не потерявшую своей свежести и красоты. И хотя автор не присылал ее на конкурс, именно эта задача стала юбилейной «M1000».

M1000. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM>MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH=HM+MB$ (рис. 1, с. 42).

Архимед (Сиракузы)

Ф1008. Стержень AB помещен внутрь цилиндра. В точке A стержень закреплен шарнирно, в точке C он опирается на верхнюю кромку цилиндра, точки A и C лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра (рис. 2); угол, который составляет стержень с горизонтом, равен α. Стержень смещают по верхней кромке так, что он касается ее в точке C' и угол $C'OC$ равен φ. При каком минимальном коэффициенте трения стержень будет находиться в этом положении в равновесии?

С. С. Кротов

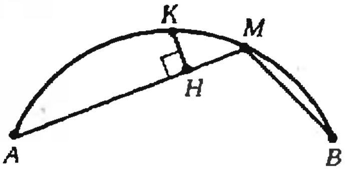


Рис. 1.

Ф1009. Плоский диск радиуса R, расположенный в горизонтальной плоскости, начинают продвигать между двумя вертикальными нитями, расстояние между которыми R; длина каждой нити $2l$, жесткость k, концы нитей закреплены (рис. 3). Найти силу, действующую на диск со стороны одной нити через время t, если в начальный момент нити были нерастянуты и касались диска, диск двигают с постоянной скоростью v. Толщиной диска пренебречь; трение не учитывать.

А. С. Розенберг, ученик 9 кл.

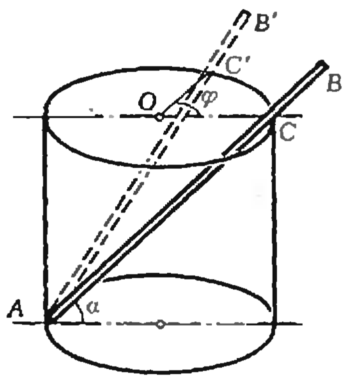


Рис. 2.

Ф1010. Две диэлектрические заряженные нити бесконечной длины расположены в пространстве как две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Линейная плотность зарядов на нитях σ. Найти силу взаимодействия нитей. Считать, что нити очень тонкие и перераспределение зарядов не происходит.

И. В. Шутовский, ученик 10 кл.

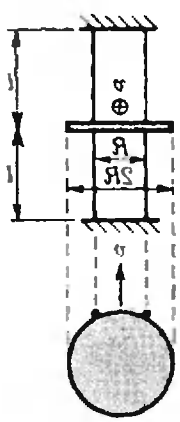


Рис. 3.

Ф1011. Воздушный шар, подъемная сила которого создается горячим воздухом, устроен так, что объем его обогреваемой камеры практически постоянен, а давление в ней равно внешнему давлению, так как камера в нижней своей части сообщается с атмосферой. Обогрев в камере производится постоянно для компенсации теплоотдачи в окружающую среду. Такой шар при постоянной мощности нагревателя плавает в атмосфере на определенной высоте. Насколько изменится высота плавания, если при увеличении мощности нагревателя средняя температура воздуха в камере увеличится на $\Delta t = 0{,}1$ °C от начальной температуры $t = 57$ °C? Температура окружающей среды $t_0 = 17$ °C.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф1012. Торец длинного стеклянного цилиндра радиуса R закрыт светонепроницаемой пластинкой, в которой имеется вертикальная щель; ширину d щели можно менять. На пластинку под углом α падает пучок параллельных световых лучей (рис. 4); освещенность пластинки E. У противоположного торца цилиндра находится фотоэлемент. Построить график зависимости светового потока, принимаемого фотоэлементом, от ширины щели d. Показатель преломления стекла n.

А. А. Лапидес

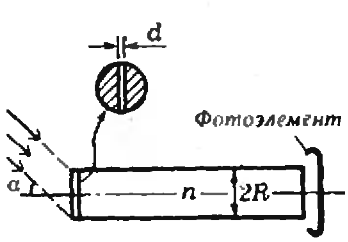


Рис. 4.

Замечание к решению М970 (*см. «Квант» № 6, с. 37*). Из писем читателей мы обнаружили, что условие М970 можно понимать двояко (слова «ближайшие к ней» отнести к «своей» остановке или к только что отмененной). Правильный ответ при $n = 32$ (в пункте а)) — 3, а не 2. Обе трактовки заслуживают внимания, и мы еще вернемся к ним.

Problems

M996 — M1000; P1008 — P1012

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and adress in block letters.

Problems M996 — M998 and M999 a) in this issue were proposed at the 20th All-Union school mathematics olympiad. The complete list of problems given at this olympiad (with solutions) will appear in *Kvant* in this year's 11th issue.

M996. Two equal squares intersect in an octagon. The sides of one square are blue, of the other, red. Prove that the total length of the octagon's blue sides equals that of the red ones.

V. V. Proizvolov

M997. Prove that the sum of all numbers of the form $1/m\,n$, where m and n are natural numbers, $1 \leqslant m < n < 1986$, is not an integer.

D. A. Mitkin

M998*. Consider all the tetrahedra $AXBY$ circumscribed about a given sphere. Prove that if the points A and B are fixed, then the sum of angles of the quadrangle $AXBY$, i. e. the sum

$$\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX,$$

does not depend on the choice of the points X and Y.

I. F. Sharygin

M999*. a) Prove that for all positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ we have

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Prove that the constant 4 in the right hand side

b) may be replaced by 2;

c) cannot be replaced by any smaller number.

L. D. Kurlyandchik, A. S. Merkuriev

The editors have received numerous letters with the heading "M1000 problem contest". Several of them contained very interesting problems, which in time will be published in the Kvant problem section. However, the authoritative jury was unable to choose any one problem, clearly standing out among the others. Then the jury's attention was attracted by a relatively obscure old problem, which has not lost its novelty and beauty. And although its author did not send it to the contest, it is this problem which appears as "M1000".

M1000. The polygonal line AMB consisting of two segments ($AM > MB$) is inscribed in the arc AB. Prove that the base H of the perpendicular KH to the segment AM, lowered from the midpoint K of the arc AB, divides the polygonal line into equal parts: $AH = HM + MB$.

Archimedes (Syracuse)

P1008. The rod AB is linked by a hinge to the botton of a cylinder at the point A and leans on the point C of the upper edge of the cylinder, the points A and C being in the vertical plane passing through the cylinder's axis (see figure Рис. 2); the angle between the rod and the horizontal plane is α. The rod is moved along the upper edge of the cylinder until it leans on it at the point C' and angle $C'OC$ equals φ. For what minimal friction coefficient will the rod be in equilibrium in this position?

S. S. Krotov

P1009. A flat weightless disc of radius R, held horizontally, is pushed between two vertical strings of length $2l$, elasticity k, whose extremities are fixed, the distance between them being R (see figure Рис. 3). Find the force exerted by one string on the disk after time t, if at the initial moment the disk just touched the strings and moves with constant velocity v. The disk is thin, friction negligible.

A. S. Rozenberg, 9th form pupil

P1010. Two dielectric charged strings of infinite length form perpendicular non-intersecting lines in space. The linear charge density on the strings is σ. Find the force of interaction between the strings, assuming the strings to be very thin, no charge redistribution taking place.

I. V. Shutovski, 10th form pupil

P1011. An aerostat, whose lifting power is caused by hot air contained in a heated chamber inside which pressure equals atmospheric pressure (because the lower part of the chamber communicates with the atmosphere), is constantly heated to compensate heat losses to the surroundings. For a fixed power of the heater, such an aerostat floats at a determined altitude. How will this altitude change, if the heating power is increased, leading to an increase of $\Delta t=0.1$ °C in the mean temperature in the chamber, which initially equalled $t=57$ °C? The surrounding temperature is $t_0=17$ °C.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1012. The left extremity of a long glass cylinder of radius R is obstructed by an opaque thin disk with a vertical slit whose width d can be changed. A beam of parallel light rays falls on the disk, forming the angle α with it (see figure Рис. 4, p. 42); the disk's illumination is E. A photoelement is placed at the other extremity of the cylinder. Plot the dependence of light flux registred by the photoelement on the width of the slit d. The refraction coefficient of glass is n.

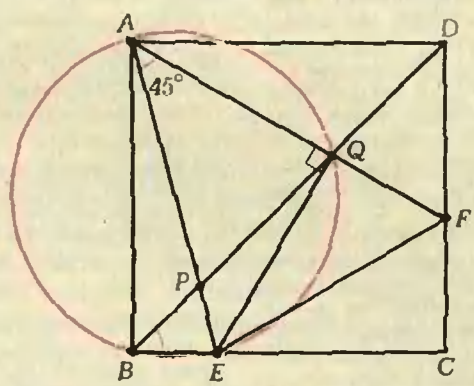
A. A. Lapides

Решения задач

M976—M980; Ф988—Ф992

M976. *Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45°. Один пересекает сторону BC в точке E, диагональ BD — в точке P, другой — сторону CD в точке F, диагональ BD — в точке Q. Докажите, что площадь треугольника AEF вдвое больше площади треугольника APQ.*

Поскольку $\angle QAE=\angle QBE=45°$ и точки A и B лежат по одну сторону от отрезка QE, вокруг четырехугольника $ABEQ$ можно описать окружность (см. рисунок). Следовательно, $\angle AQE=180°-\angle ABE=90°$, то есть треугольник AQE — прямоугольный равнобедренный и $AE=\sqrt{2}\,AQ$. Аналогично $AF=\sqrt{2}\,AP$. Отсюда, учитывая, что тре-



угольники AEF и APQ имеют общий угол при вершине A, получаем, что они подобные с коэффициентом $\sqrt{2}$, и значит, площадь первого вдвое больше площади второго.

Э. Г. Готман

◆

M977. *Можно ли с помощью операций сложения, вычитания и умножения из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить x, если: а) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; б) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$; в) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$; г) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=x^2$.*

Ответ: в задаче б) можно, в остальных задачах — нельзя.

Для решения задачи б) заметим, что $f-g=x+2$, поэтому

$$(f-g)^2-2(f-g)-f=(f-g)(f-g-2)-f=x(x+2)-x^2-x=x.$$

В остальных задачах мы воспользуемся тем, что если многочлен x выражается через $f(x)$ и $g(x)$ с помощью операций сложения, вычитания и умножения, то любое число a выражается таким же образом через числа $f(a)$ и $g(a)$.

а) Возьмем $x=-1$, тогда $f(x)=0$, $g(x)=3$. Оба эти числа делятся на 3, поэтому и любое число, составленное из них при помощи сложения, вычитания и умножения, должно делиться на 3 и, следовательно, отлично от -1.

в) Дробное число $x=1/2$ не может выражаться рассматриваемым способом через целые числа $f(1/2)=1$ и $g(1/2)=1$.

г) Возьмем $x=\sqrt{2}$, тогда $f(x)=5\sqrt{2}$, $g(x)=2$. Любая допустимая условием задачи комбинация чисел $5\sqrt{2}$ и 2 имеет вид $m+5n\sqrt{2}$, где m и n — целые. Но равенство $\sqrt{2}=m+5n\sqrt{2}$ невозможно, поскольку из него следовало бы, что $\sqrt{2}=m/(1-5n)$ — рациональное число.

С. И. Кублановский

◆

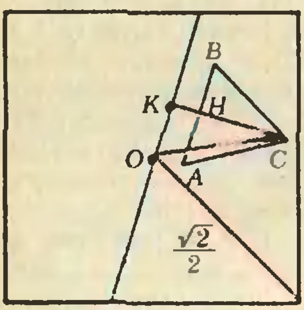
М978. *Можно ли в квадрате со стороной 1 расположить два правильных треугольника со сторонами больше $\sqrt{2/3}$, не налегающих друг на друга?*

Ответ: Нельзя. Достаточно доказать, что любой правильный треугольник со стороной $\sqrt{2/3}$, лежащий в квадрате со стороной 1, содержит центр квадрата (как внутреннюю точку).

Докажем это утверждение от противного. Если правильный треугольник ABC не содержит центр квадрата O, то у него найдется такая сторона, скажем, AB, что треугольник и точка O лежат по разные стороны от прямой AB (см. рисунок). Проведем через O прямую, параллельную AB, и опустим из точки C перпендикуляр CK на эту прямую. Пусть H — точка его пересечения со стороной AB, тогда

$$CH<CK\leqslant CO,$$

но расстояние CO, очевидно, не превосходит половины диагонали квадрата (так как точка C лежит внутри квадрата). А поскольку CH — высота треугольника, для длины его стороны мы получаем оценку



$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}CH<\frac{2}{\sqrt{3}}CO\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Противоречие.

Е. А. Карлов, И. К. Димитров

◆

М979. *Пусть k и n — натуральные числа, $2\leqslant k\leqslant n$. Назовем набор k положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, меньших 1, исключительным, если для любого разбиения $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ числа n на неотрицательные целые слагаемые хотя бы одно из чисел a_in_i — целое ($i=1, 2, \ldots, k$).*
а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?
б) Каковы эти наборы?

Ответ: а) $n-k$ должно быть нечетно; б) единственный исключительный набор (при нечетном $n-k$) $a_1=a_2=\ldots=a_k=1/2$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — исключительный набор. Положим $n_1=n-k+1$, $n_2=n_3=\ldots=n_k=1$; тогда $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ и одно из чисел a_in_i должно быть целым. Но при $i\geqslant 2$ числа $a_in_i=a_i$ — не целые, поэтому $a_1(n-k+1)$ — целое, то есть число $a_1(n-k)$ — не целое. Положим теперь $n_1=n-k$, $n_2=2$, $n_3=\ldots=n_k=1$. Единственное из произведений a_in_i, которое может быть целым для этих n_i,— это $a_2n_2=2a_2$, следовательно, $a_2=1/2$. Точно так же доказывается, что $a_i=1/2$ при всех i. Но мы уже видели, что число $a_1(n-k+1)=(n-k+1)/2$ — целое; значит, $n-k$ — нечетное число.

Е. А. Горин

◆

М980. *Внутри выпуклого а) многоугольника, б) многогранника с вершинами A_1,*

а) Разобьем данный многоугольник на треугольники с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_n$ (для этого

$A_2, \ldots, A_n$ взята точка O. Докажите, что среди $n(n-1)/2$ углов A_iOA_k ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) не менее, чем $n-1$, имеют величину от $90°$ до $180°$.

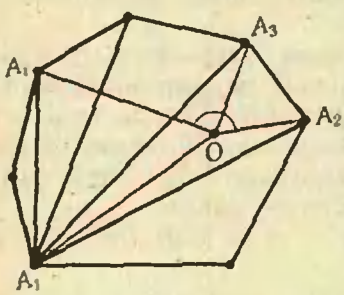


Рис. 1.

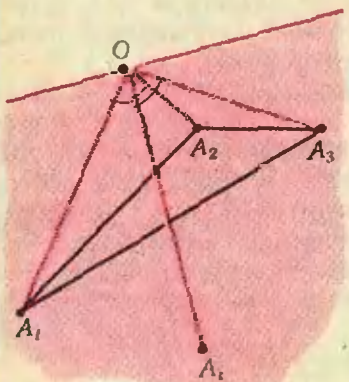


Рис. 2.

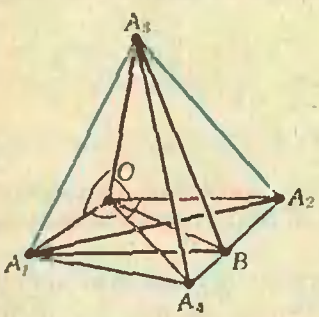


Рис. 3.

достаточно провести все диагонали из вершины A_1). Точка O попадет в один из этих треугольников (возможно, на границу); пусть это будет $A_1A_2A_3$ (рис. 1). Для любой из вершин A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ один из углов A_1OA_i, A_2OA_i и A_3OA_i будет неострым. Действительно, иначе все три вершины нашего треугольника оказались бы по одну сторону от перпендикуляра к OA_i, проведенного через точку O (причем внутри ограниченной им полуплоскости; рис. 2), а это означало бы, что точка O лежит вне треугольника. Таким образом, мы получим по одному неострому углу для каждой из $n-3$ вершин $A_4, A_5, \ldots, A_n$; еще два неострых угла мы можем выбрать из трех углов A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_1 (если, скажем, угол A_1OA_2 острый, то углы A_1OA_3 и A_2OA_3 — неострые). Всего получится $n-3+2=n-1$ неострых углов.

б) Решение этой задачи аналогично решению задачи а). Сначала разобьем данный многогранник на тетраэдры с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_n$. Для этого разобьем все грани, не содержащие вершину A_1, на треугольники, как в пункте а) (треугольные грани дополнительно разбивать, конечно, не нужно), и возьмем в качестве тетраэдров искомого разбиения тетраэдры с общей вершиной в точке A_1, основаниями которых являются все эти треугольники. Допустим, что точка O попала в тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Так же, как в пункте а), доказывается, что хотя бы один из 4-х углов, образуемых лучом OA_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, с лучами OA_1, OA_2, OA_3 и OA_4, будет неострым. Полагая $i = 5, 6, \ldots$, получим $n-4$ неострых угла. Для $i=1$ получим еще один такой угол, скажем, A_1OA_2. Если угол A_3OA_4 острый, то для $i=3$ и $i=4$ получим еще 2 неострых угла, а всего $n-4+3=n-1$. Пусть, наконец, угол A_3OA_4 неострый. Остается доказать, что среди углов A_1OA_3, A_3OA_2, A_2OA_4 и A_4OA_1 есть еще хотя бы один неострый.

Допустим, что это не так, тогда сумма этих четырех углов меньше $360°$, и точка O, как легко видеть, лежит в н у т р и тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Обозначим через B точку пересечения плоскости A_1OA_3 с ребром A_2A_4. Воспользуемся тем (рис. 3), что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла (см., например, статью Б. М. Ивлева «Двугранные и многогранные углы» в «Кванте» № 12 за 1984 г.):

$$360° > \angle A_1OA_3 + \angle A_3OA_2 + \angle A_2OA_4 + \angle A_4OA_1 =$$
$$= \angle A_1OA_3 + (\angle A_3OA_2 + \angle A_2OB) + (\angle BOA_4 +$$
$$+ \angle A_4OA_1) > \angle A_1OA_3 + \angle A_3OB + \angle BOA_1 = 360°.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

В. Г. Болтянский, В. Н. Дубровский

◆

Ф988. *Хоккеист скользит по льду на одном коньке. Известно, что лед тает под коньком на глубину $h = 0.03$ мм. Шири-*

При движении хоккеиста между коньком и льдом возникает трение. Работа силы трения переходит в конечном счете в тепло, которое идет на плав-

на конька $d=2$ мм. Найти силу трения между коньком и льдом. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\times10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho=0{,}9$ г/см^3. Считать теплопроводность льда малой.

ление льда под коньком.

За малый промежуток времени Δt хоккеист, двигаясь с постоянной скоростью v (Δt столь мало́, что изменением скорости за это время можно пренебречь по сравнению со значением самой скорости), проходит путь $\Delta x=v\cdot\Delta t$. Работа, совершаемая при этом силой трения, равна

$$A=F_{тр}\cdot\Delta x=F_{тр}v\cdot\Delta t.$$

Масса льда, растявшего за это время под коньком, равна $\Delta m=\rho hdv\cdot\Delta t$. Количество тепла, которое потребовалось для плавления этой массы льда,—

$$\Delta Q=\lambda\cdot\Delta m=\lambda\rho hdv\cdot\Delta t.$$

Таким образом, $A=\Delta Q$, или

$$F_{тр}v\cdot\Delta t=\lambda\rho hdv\cdot\Delta t,$$

откуда

$$F_{тр}=\lambda\rho hd=3{,}3\cdot10^5\cdot0{,}9\cdot10^3\cdot3\cdot10^{-5}\cdot2\times10^{-3}(\text{Н})\approx17{,}8\ \text{Н}.$$

Может показаться странным, что в полученное для $F_{тр}$ выражение не входит скорость движения хоккеиста. В действительности искомая сила трения зависит от скорости, поскольку от нее зависит величина h. Следовательно, сформулированные в задаче условия отвечают вполне определенной скорости скольжения.

М. Г. Гаврилов

◆

Ф989. *Модель тележки на гусеничном ходу поставили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и отпустили. Найти ускорение модели. Длина модели $l=50$ см, высота $h=2$ см. Гусеницы сделаны из резины, их масса составляет 80 % всей массы модели. Трение в механизме модели пренебрежимо мало.*

При таком угле наклона резиновые гусеницы движутся по плоскости без проскальзывания. Значит, тепло при движении не выделяется (отсутствует трение между гусеницами и поверхностью и нет трения в механизме модели).

Воспользуемся законом сохранения энергии. Для расчета кинетической энергии учтем, что длина гусениц много больше высоты модели, и будем считать, что при движении модели со скоростью v нижняя половина гусениц неподвижна, а верхняя половина имеет скорость $2v$. Тогда кинетическая энергия модели —

$$E_к=0{,}4m\frac{(2v)^2}{2}+0{,}2m\frac{v^2}{2}=0{,}9mv^2$$

(m — масса всей модели; $0{,}4m$ — масса половины гусениц; $0{,}2m$ — масса модели без гусениц). За малый промежуток времени Δt модель опустится на $\Delta h=v\cdot\Delta t\cdot\sin\alpha$, и ее кинетическая энергия увеличится на $\Delta E_к=mgv\cdot\Delta t\cdot\sin\alpha$. Если за это время скорость модели увеличилась на Δv, то $\Delta E_к=0{,}9m(v+\Delta v)^2-0{,}9mv^2\approx1{,}8mv\cdot\Delta v$, то есть

$$mgv\cdot\Delta t\cdot\sin\alpha=1{,}8mv\cdot\Delta v,$$

откуда находим ускорение

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{g\sin\alpha}{1{,}8}\approx2{,}7\ \text{м/с}^2.$$

А. И. Буздин

◆

Ф990. *Тепловой двигатель представляет собой наполненный газом цилиндр с поршнем, движение которого ограничено упорами АА и ББ*

Нарисуем цикл на диаграмме $p—V$. Начнем с момента, когда газ станет расширяться. Нагрев производится очень медленно, поэтому можно считать, что поршень в любой момент находится *(рис. 1). Газ медленно нагревают, пока поршень не коснется упоров ББ, после чего основание пружины смещают из положения ВВ в положение ГГ. Затем сосуд медленно охлаждают до тех пор, пока поршень не коснется упоров АА. Тогда основание пружины смещают назад до ВВ, цилиндр снова нагревают и т. д. Найти КПД этого двигателя. Цилиндр заполнен гелием; площадь поршня $S=10$ см^2; жесткость пружины $k=10$ Н/м, длина ее в нерастянутом состоянии $l_0=60$ см. Внешнее давление принять равным нулю.*

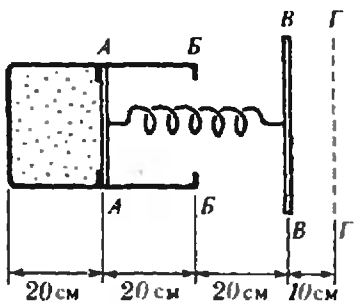


Рис. 1.

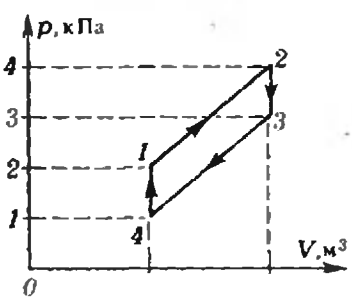


Рис. 2.

в равновесии.

Учтем, что длина пружины в нерастянутом состоянии равна расстоянию от левой стенки сосуда до линии *ВВ* (см. данные, приведенные на рисунке 1), поэтому при расширении газа (при движении поршня от упоров *АА* до упоров *ББ*) сила упругости пружины пропорциональна объему газа — $F_{упр}=kx=kV/S$, и значит, давление газа —

$$p_{1\to2}=\frac{k}{S^2}V.$$

На этом участке объем газа увеличивается от $V_1=2\cdot10^{-4}$ м^3 до $V_2=4\cdot10^{-4}$ м^3. Давление газа возрастает от $p=\frac{k}{S^2}V_1=2\cdot10^3$ Па до $p_2=\frac{k}{S^2}V_2=4\cdot10^3$ Па (см. рис. 2).

После того как основание пружины сместили из *ВВ* в *ГГ*, сила упругости пружины уменьшилась. В результате при охлаждении сосуда газ начнет сжиматься не сразу, а лишь после того, как давление газа на поршень упадет настолько, что сила давления газа станет равной силе упругости пружины. Это произойдет при $p_3=\frac{10\cdot0{,}3}{10^{-3}}$ Па $=3\cdot10^3$ Па (см. рис. 2). При дальнейшем охлаждении газ будет сжиматься, и давление будет меняться по закону

$$p_{3\to4}=\frac{k}{S^2}(V-V_0),$$

где V_0 — объем, занимаемый газом в случае, когда пружина, закрепленная в положении *ГГ*, оказывается нерастянутой: $V_0=0{,}1\cdot10^{-3}$ м^3 $=1\cdot10^{-4}$ м^3. Таким образом, $p_4=\frac{k}{S^2}(V_1-V_0)=1\cdot10^3$ Па.

После того как основание пружины переместят из положения *ГГ* в положение *ВВ*, сила упругости возрастет. Поэтому при последующем нагревании газа он начнет расширяться лишь с того момента, когда сила давления газа возрастет до значения силы упругости. Это произойдет при $p=p_1=2\cdot10^3$ Па; в дальнейшем процесс повторяется (см. рис. 2).

Работу газа за один цикл можно найти как площадь параллелограмма на рисунке 2:

$$A=0{,}2\ \text{Па}\cdot\text{м}^3=0{,}2\ \text{Дж}.$$

Тепло газ получает на участках $1\to2$ и $4\to1$; учитывая, что газ одноатомный, находим:

$$Q=Q_1+Q_2=A_{1\to2}+\Delta U_{1\to2}+\Delta U_{4\to1}=$$

$$=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1)+\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1)+\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_4)=$$

$$=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1)+\frac{3}{2}(p_2V_2-p_4V_4)=2{,}7\ \text{Дж}.$$

Таким образом, КПД этого двигателя —

$$\eta=\frac{A}{Q}\cdot100\,\%\approx7{,}4\,\%.$$

Полезную работу в этом цикле «снимают» с двигателя при смещении основания пружины — когда газ нагрет и его давление велико, он совершает работу бо́льшую, чем работа внешних сил при обратном смещении основания пружины.

А. Р. Зильберман

◆

Ф991. *В схеме, приведенной на рисунке 1, $U_0=2{,}4$ В, $R=600$ Ом, $r=200$ Ом, диоды $Д_1$ и $Д_2$ имеют одинаковые вольт-амперные характеристики (красная кривая на рисунке 2). Найти ток через диод $Д_2$.*

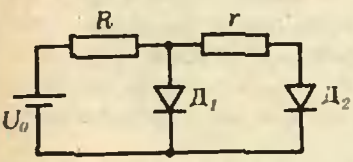


Рис. 1.

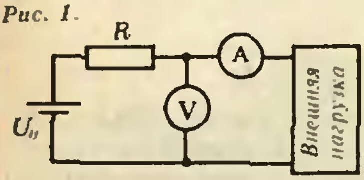


Рис. 1а.

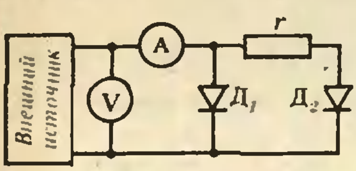


Рис. 1б.

Будем решать задачу графически.

Разобьем схему на две части — батарейка и резистор (Б+Р) (рис. 1а) и цепь с нелинейными элементами (р+Д₂+Д₁) (рис. 1б) — и построим их вольт-амперные характеристики.

Для участка (Б+Р) зависимость $I(U)$ находится легко:

$$I=\frac{U_0-U}{R} \qquad (\text{при } U\leqslant U_0)$$

— прямая $I_{Б+Р}$ на рисунке 2.

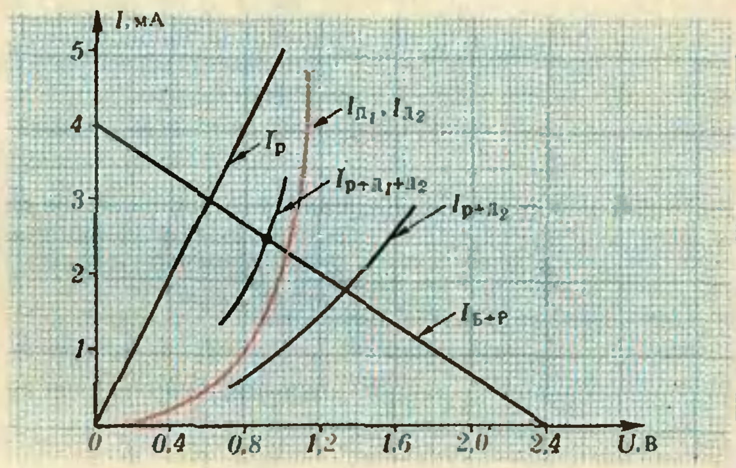


Рис. 2.

В нелинейной цепи сначала найдем *зависимость* $I(U)$ для последовательно соединенных резистора r и диода $Д_2$ (р+$Д_2$). Нарисуем прямую $I_r=U/r$ и для каждого значения тока просуммируем значения падений напряжения на r и на $Д_2$. Получится кривая $I_{р+Д_2}$ (см. рис. 2).

Теперь для каждого значения напряжения найдем полный ток в нелинейной цепи — просуммируем значения токов через $Д_1$ и в участке (р+$Д_2$). Полученная кривая $I_{р+Д_1+Д_2}$ — вольт-амперная характеристика нелинейной цепи, выде*ленной на рисунке 1б. Заметим*, что нам не надо строить всю кривую $I_{р+Д_1+Д_2}$ — достаточно кусочка в районе пересечения этой кривой с вольт-амперной характеристикой участка Б+Р (с прямой $I_{Б+Р}$). Точка пересечения этих линий — $U\approx 0{,}9$ В и $I_{общ}\approx 2{,}5$ мА — дает значения напряжения и полного тока в цепи (р+$Д_1$+$Д_2$). Ток через диод $Д_1$ при напряжении 0,9 В равен $I_1=1{,}5$ мА; значит, ток через резистор r и диод $Д_2$ равен

$$I_2=I_{общ}-I_1=0{,}9 \text{ мА}.$$

Р. З. Александров

Ф992. *При съемке кадра из фильма «Гулливер в стране лилипутов» актера, играющего роль Гулливера, поместили на расстоянии 4 м от кинокамеры с короткофокусным объективом, а актера, исполняющего роль лилипута,— на расстоянии 40 м. На какое расстояние нужно навести объектив камеры, чтобы изображения обоих героев на киноленте были одинаково четкими?*

Почему при такой съемке используется короткофокусный объектив? Оцените фокусное расстояние такого объектива, если известно, что обычная (некомбинированная) съемка людей с расстояния 5 м проводится объективом с фокусным расстоянием 50 см и глубина резкости при этом 0,5 м.

Будем считать объектив тонкой линзой. На рисунке (см. с. 51) приведена схема построения изображения на пленке в кинокамере.

Изображения обоих героев фильма будут одинаково четкими, если любые две точки лилипута и Гулливера, например A_2 и A_1, будут представлены на киноленте световыми пятнышками одинакового радиуса.

Действительные изображения точек A_1 и A_2, расположенных на расстояниях d_1 и d_2 от линзы (объектива), находятся в точках B_1 и B_2 на расстояниях f_1 и f_2 соответственно. Если экран (кинопленку) поместить в плоскости BC на расстоянии f от линзы, то изображения точек A_1 и A_2 будут одинаково размыты — вместо точек B_1 и B_2 на экране будут пятна одинакового радиуса $r=|CB|$. Следовательно, объектив кинокамеры следует навести на точку A, расположенную на расстоянии d от линзы, такую, что ее изображение попадет в точку B.

Из подобия треугольников B_1CB и B_1KO, B_2CB и B_2KO следует:

$$\frac{f-f_1}{f_1}=\frac{r}{R},\quad \frac{f_2-f}{f_2}=\frac{r}{R},$$

где $R=|OK|$ — радиус диафрагмы объектива (эта величина в основном определяется необходимой глубиной резкости и условиями освещения), и отсюда получаем:

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{2}{f}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из формулы линзы следует, что

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_1},\quad \frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_2},\quad \frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d},$$

где F — фокусное расстояние линзы. Подставив эти выражения в (1), получим:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{2}{d},$$

откуда

$$d=2\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}.$$

Подставляя численные значения $d_1=40$ м и $d_2=4$ м, находим, что при комбинированной съемке объектив следует навести на точку, находящуюся на расстоянии $d=7{,}3$ м от объектива.

В конечный ответ не входит величина фокусного расстояния объектива. Зачем же требовать, чтобы он был короткофокусным?

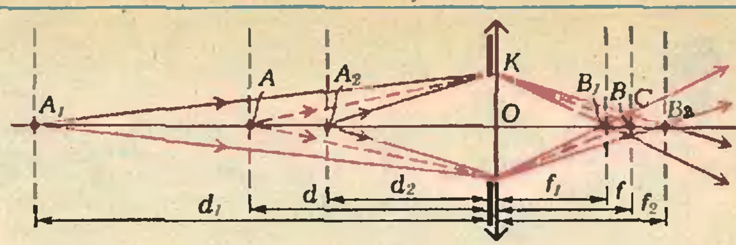
Выразим величину r/R через d_1, d_2 и F:

$$\frac{r}{R}=\frac{(d_1-d_2)F}{2d_1d_2-F(d_1+d_2)};$$

так как $F\ll d_1$, d_2, то для получения оценки можно считать, что

$$\frac{r}{R}=\frac{d_1-d_2}{2d_1d_2}F, \qquad (2)$$

и, следовательно, размытость изображений точек, находящихся на расстояниях d_1 и d_2 от линзы, прямо пропорциональна фокусному расстоянию.



Так так при обычной (некомбинированной) съемке $d_1 \approx d_2 \approx d_0$, то из (2) следует:

$$\left(\frac{r}{R}\right)_{об} = \frac{\Delta d}{2d_0^2} F_{об},$$

где d_0 — *расстояние до объекта*, Δd — глубина резкости, $F_{об}$ — фокусное расстояние применяемого при этой съемке объектива. При комбинированной съемке $d_1 \gg d_2$, и из (2) следует:

$$\left(\frac{r}{R}\right)_{комб} = \frac{1}{2d_2} F.$$

Чтобы качество изображений (их размытость) было одинаковым при этих двух видах съемки, необходимо потребовать, чтобы при съемке с одинаковой диафрагмой радиусы пятен $r_{об}$ и $r_{комб}$ были *одинаковыми*. Тогда

$$F = F_{об} \frac{\Delta d \cdot d_2}{d_0^2}.$$

Подставляя численные значения $F_{об} = 50$ см, $\Delta d = 0{,}5$ м, $d_0 = 5$ м и $d_2 = 4$ м, получим $F = 4$ см.

Значит, для получения качественных снимков с большой глубиной резкости следует применять короткофокусный объектив.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция!
В статье «Загадочный Плутон», опубликованной на страницах вашего журнала («Квант», 1983, № 3), упоминалось об изобретении нового метода измерения диаметров небесных тел. Не могли бы вы рассказать, на чем основан этот метод?

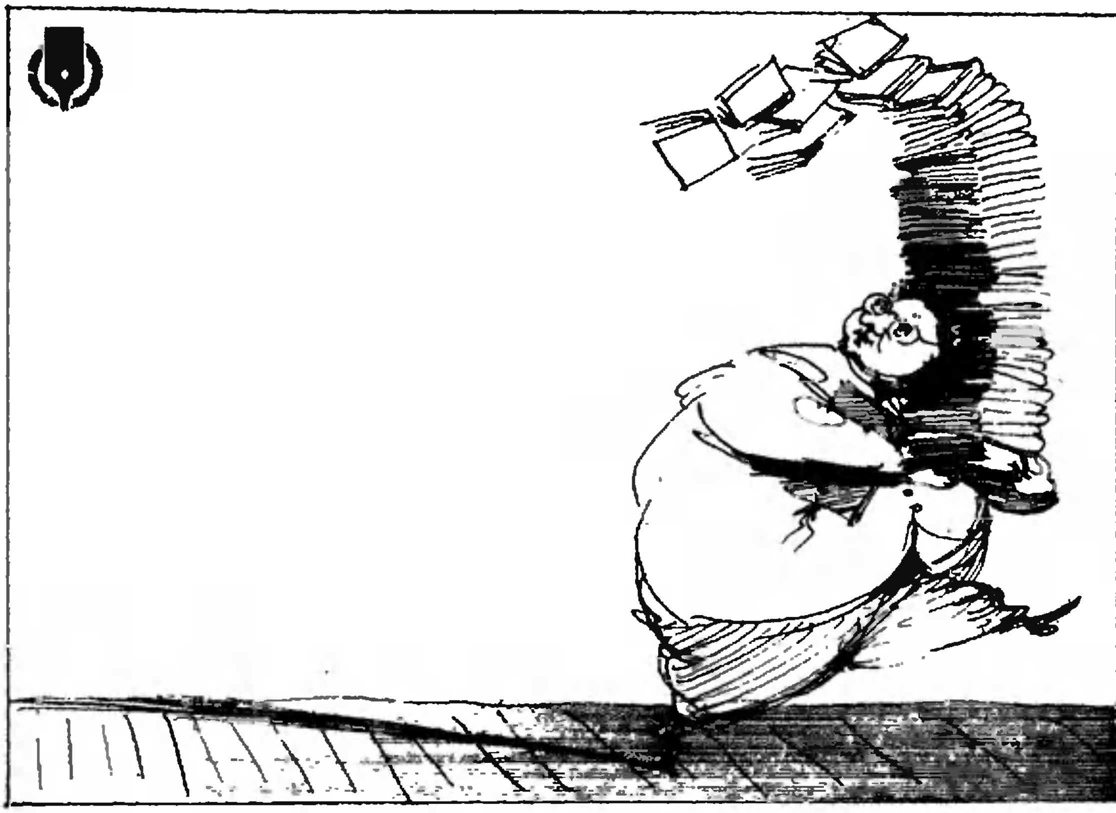
Ваш читатель О. Андреев

На это письмо редакция попросила ответить автора указанной статьи В. А. Бронштэна.

Новый способ измерения диаметров далеких небесных тел называется спекл-интерферометрией. Слово «спекл» — английское и означает «пятнышко». Метод использует возможности современной электроники.

До сих пор главным препятствием в получении отчетливых изображений небесных *тел с поверхности Земли* было дрожание оптического инструмента и колебания воздуха. Из-за этого изображение светила на фотопластинке за время экспозиции (порой весьма длительное) размазывалось, и нельзя было ни измерить его диаметр, ни судить о форме тела.

В новых приборах вместо фотопластинки устанавливается блок фотоэлементов. Так как электроника срабатывает быстрее, чем происходят колебания атмосферы и инструмента, она как бы держит изображение на месте, не давая ему расплываться. С блока фотоэлементов изображение передается *на экран типа* телевизионного, откуда может быть сфотографировано. Измерение диаметра выполняет опять-таки электроника. Вот основы нового метода.



При подготовке к вступительным экзаменам в вуз полезно познакомиться с теми материалами, которые уже были опубликованы в разделе «Практикум абитуриента».
Ниже приводится тематический список таких статей, напечатанных в «Кванте» начиная с 1981 года.

Физика

Механика

«Задачи о спутниках» (1981, № 1),
«Криволинейное движение» (1981, № 10),
«Кинематика. Относительность движения» (1982, № 10),
«Законы Ньютона» (1982, № 12),
«Движение по окружности» (1984, № 6),
«Повторим гидростатику» (1985, № 2),
«Механическая работа и механическая энергия» (1985, № 5),
«Законы Кеплера и школьная физика» (1986, № 2).

Молекулярная физика. Тепловые явления

«Закон сохранения энергии для тепловых процессов» (1981, № 2),
«Закон Дальтона» (1981, № 11),
«Диаграмма состояния» (1981, № 12),
«Уравнение газового состояния» (1983, № 2),
«Теплоемкость идеального газа» (1984, № 4),
«Фазовые превращения» (1985, № 7),
«Тепловые процессы в газах» (1986, № 4).

Основы электродинамики

«Электроизмерительные приборы» (1981, № 7),
«Электрические цепи с нелинейными элементами» (1982, № 1),
«Проводящая сфера в задачах по электростатике» (1983, № 3),
«Магнитное поле и магнитные силы» (1984, № 3),
«Передача электроэнергии на расстояние» (1984, № 10),
«Парадоксы плоского конденсатора» (1985, № 8),
«Электромагнитная индукция» (1986, № 6).

Колебания и волны

«Колебания» (1981, № 3),

«Переменный электрический ток» (1982, № 2),
«Повторим колебания» (1985, № 10).

Оптика

«Построение изображений наклонных предметов» (1981, № 5),
«Интерференция света» (1981, № 6; 1985, № 12),
«Фотоны» (1982, № 3),
«Оптические системы» (1982, № 5),
«Интерференция волн» (1983, № 5).

Атомная физика

«Законы сохранения при ядерных превращениях» (1982, № 7).

Некоторые общие вопросы

«Приближенные вычисления при решении задач по физике» (1981, № 4),
«Уравнения думают за нас» (1981, № 9),
«Квадратное уравнение в задачах по физике» (1982, № 8),
«Задачи-оценки» (1983, № 7),
«Характерные ошибки на экзаменах по физике» (1983, № 9).

Математика

Радикалы, степень

«Что такое степень?» (1981, № 2),
«О сокращении показателей» (1982, № 6).

Уравнения, системы, неравенства

«Показательные уравнения» (1981, № 1),
«Логарифмические уравнения» (1981, № 2),
«Надо ли искать ОДЗ?» (1982, № 4),
«Когда $|a+b|=|a|+|b|$?» (1983, № 3),
«Простой прием в непростых задачах» (1984, № 9),
«Надо ли делать проверку?» (1984, № 10),
«Об одном способе решения некоторых уравнений» (1984, № 11),
«Геометрия помогает решать уравнения» (1984, № 12),
«Сколько корней имеет уравнение?» (1985, № 3),
«Метод интервалов» (1985, № 12),
«Задачи на сравнение чисел» (1986, № 2),
«Каков же ответ?» (1986, № 2).

Многочлены, функции, графики

«Можно и без производной» (1981, № 9),
«Используя графики» (1982, № 9),
«Формулы и графики» (1982, № 11),
«Обратные тригонометрические функции» (1983, № 4),
«Квадратный трехчлен» (1983, № 9),
«$n^x=x^n$» (1983, № 10),
«Как расположены корни трехчленов?» (1986, № 7).

Планиметрия

«Метрические соотношения в треугольнике» (1985, № 4).

Стереометрия

«Геометрические аналогии» (1981, № 10),
«Многофигурная стереометрическая задача» (1983, № 2),
«Двугранные и трехгранные углы» (1984, № 12),
«Основные углы в правильной пирамиде» (1986, № 1),
«Куб помогает» (1986, № 5).

Планиметрия и стереометрия

«Вспомогательные отрезки и углы» (1981, № 9),
«Векторы в геометрических задачах» (1985, № 10).

Координатный метод

«Плоскость и пространство» (1982, № 6).

Производная

«Десять задач на применение производной» (1981, № 1),
«Дифференцирование сложной функции» (1984, № 4),
«Уравнение касательной» (1986, № 3).

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи:
«Читатели советуют» (1981, № 4),
«Можно решить проще» (1981, № 5)

Школьник — абитуриент — студент — инженер

Кандидат технических наук
Э. П. КАЗАНДЖАН

В этой статье преподаватель математики одного из ведущих московских технических вузов делится своими мыслями о том, какие качества должен развивать в себе будущий инженер. И хотя не все высказывания этих полемических заметок бесспорны, мы надеемся, что они окажутся полезными нашим читателям, особенно десятиклассникам, готовящимся к поступлению во втуз.

Много лет обучая математике во втузе, привык сталкиваться с некоторыми характерными заблуждениями в психологии учеников — абитуриентов, студентов. Порой кажется, что преподаватели и ученики говорят на разных языках.

Первые встречи — в июле, августе, когда начинаются приемно-вузовские страдания. Из года в год одни и те же недоумения: зачем эта нервотрепка? ведь только что сдавали экзамены в школе? есть ли вообще какая-нибудь польза от экзаменов? Я в своей жизни сдал экзаменов больше сотни, и бесполезных среди них не помню. Наоборот, могу сказать, что всему хорошему во мне обязан экзаменам. Что еще так организует и мобилизует? Разумеется, это не единственный «допинг» в ученье, но уж очень мощный. Моя аксиома: сдав экзамен, я должен узнать что-то новое о сданном предмете и о себе самом, полезное для будущего; стало быть, каждый сданный экзамен — это шаг вперед в моем развитии. А насчет двойных экзаменов в течение одного лета... Увы, сдавать надо не два одинаковых экзамена, а два разных (принципиально разных!) по одной программе. Школьный экзамен — удел каждого и одинаков для всех, приемный во втуз — лишь того, кто решил стать инженером. Школьный экзамен устремлен в прошлое — это отчет о проделанной работе. А на приемном экзаменатор думает о будущем — сможет ли абитуриент стать полноценным студентом, потянет ли?

Иногда школьники (а еще чаще родители) тревожатся, что им дали мало знаний. Меня это тоже беспокоит, но отнюдь не в первую очередь. Через пять лет сегодняшний абитуриент должен стать инженером. Знания — услада школьника. Потребности инженера гораздо шире — кроме знаний, ему нужны навыки, понимание, рефлексы, интуиция, уменье анализировать ситуацию, принимать решения. А одно знание в ряде случаев недостаточно или почти ничего не стоит. Тысячи болельщиков не хуже самых лучших футболистов «знают», как надо забивать голы. Среди сотен пришедших на концерт иные не хуже пианиста «знают», как играть сонату Бетховена. Знание правил шахматной игры приобретается за 15 минут, уменье играть на уровне мастера — за 15 лет.

Мы часто говорим «знание — сила», не замечая, что этот тезис уже явно устарел, его нужно как-то дополнить, скажем, «знание — сила, знание без понимания — слабость». Конечно, понимание — нечто чрезвычайно тонкое, оно углубляется всю жизнь, и было бы странно требовать сразу то, что приходит постепенно, с годами, с опытом работы. Но правильная психологическая ориентация (основа будущего понимания) должна вырабатываться как можно раньше.

Начнем с перечисления того, что мне хотелось бы видеть в «багаже» старшеклассника, а тем более абитуриента и студента, независимо от объема его знаний.

1. Грамотность. Проверяя записи на приемном экзамене и исправляя грамматические ошибки, всегда сталкиваюсь с бесстыдным недоумением — что тут такого, я торопился, какая разница и т. п. Поверьте, я стараюсь не придираться к ошибкам в языке, пока они не приводят к математическим ошибкам, не делают текст непонятным.

Трудно удержаться, чтобы не процитировать воспоминания академика А. Н. Крылова — как принимали экзамены в одной французской школе в конце прошлого века:

«Характерна также оценка письменных работ по математике: она производится, во-первых, преподавателем французского языка, который обращает внимание на правильность языка и орфографии, и, во-вторых, преподавателем-специалистом, который уже оценивает работу по существу».

Это разумный подход. Ведь что ожидает школьника, студента в будущем? Придется делать доклады, писать отчеты, статьи...

2. Аккуратность. С первых дней обучения вынужден объяснять: все, что вы пишете, кто-то будет читать — значит, неряшливое, небрежное, непонятное для окружающих изложение результатов проделанной работы делает ее бессмысленной, никому не нужной; исполнителю может быть трудно, это никого не интересует и к делу не относится, но потребителю должно быть легко, так что думайте о нем, а не о себе. Иногда приходится слышать о работнике комплимент — аккуратный инженер. В таких случаях мне всегда стыдно за свою профессию. Мы ведь не говорим: смелый летчик-испытатель или трудолюбивая балерина. Да это было бы просто смешно — трусливых летчиков и ленивых балерин не бывает. А неаккуратных инженеров — увы...

3. Отношение к результату, контроль. Для школьника этой проблемы не существует, рядом с ним учитель. Для инженера контроль — важнейший этап в решении задачи (азбучная истина — как ни трудно получить результат, иногда еще трудней его осознать и разумно им распорядиться. А начинать приходится с ...аккуратности, чистописания. Все записи должны иметь систему, понятную хотя бы их автору; эта система должна быть организована так, чтобы трудно было ошибиться и легко себя проверить (а не наоборот). Стремлюсь привить вкус к контролю результатов, превратить его в органическую потребность, такую же естественную, как заботу женщины, красиво ли она выглядит, или заботу повара, вкусен ли сваренный им обед. По-моему, стыдно, вычислив, скажем, с помощью интеграла площадь и получив отрицательный результат, нести его преподавателю — а ведь несут. Многие школьники и даже студенты наивно думают, что, раз уж их этому учат, в своей работе они будут ежеминутно дифференцировать, интегрировать... Смею заверить, что гораздо чаще придется складывать А и В и вычитать С. Разница в другом. Школьник получает результат, и все, а инженер и получает результат, и отвечает за него. В отличие от школьника или машины, инженер думает, взвешивает, анализирует, сопоставляет, сомневается, мучается, страдает, радуется, снова думает, пытается проконтролировать себя прямо и косвенно, прежде чем выдать информацию. Одно из моих педагогических «чудачеств» — при решении задач категорически запрещаю ученикам смотреть в ответ, кстати, и после решения — тоже. Причин несколько. Во-первых, совпадение с ответом ни о чем не говорит. Это отнюдь не критерий истинности решения. К тому же бывают и опечатки. Во-вторых, и самое главное: жизнь не задачник и выдвигает задачи без ответов, и надо готовиться именно к такой ситуации. Получив результат, нужно устроить себе проверку — сначала чисто техническую (повторный проход по всем выкладкам), затем смысловую: забыв обо всех промежуточных мучениях и преобразованиях, с результатом в руках вновь окунуться в условие задачи — не противоречит ли он им? Для контроля надо использовать любые, даже самые грубые и косвенные возможности — размерность, симметрию, предельные случаи и частные варианты, результаты ранее решенных задач, наконец, здравый смысл.

4. Ощущение частного и общего, умение получить информацию из соотношения. Часто слышны стоны по поводу обилия и громоздкости формул, трудности их запоминания. Мне кажется, специально запоминать любые формулы не нужно, в чем-то даже вредно. Они должны запоминаться сами, надо только создать для этого подходящие условия. Вынужден признать — часть вины здесь наша, взрослых. Промышленность могла бы помочь школьникам и студентам — печатать различные формулы на обложках тетрадей, книг, блокнотов. (Кстати, Софья Ковалевская выучила производные именно с помощью наклеенных на стене вместо обоев страниц учебника.)

Досадно видеть, как, забыв формулу корней квадратного уравнения, учащиеся напрягают память и мучаются по 10—15 минут, хотя — достаточно помнить лишь очень простую идею ее вывода (выделение полного квадрата), и результат получится в минуту. Такие же ненужные раздумья-воспоминания вызывает почти любая громоздкая формула, особенно в тригонометрии — вроде и помнится, но что-то сомнительно, коэффициент 2 или 1/2, знак «+» или «—» и т. п. Но ведь формула-то должна работать. И нечего думать и вспоминать — возьми и подставь что-нибудь конкретное в эту формулу, посмотри — получается или нет, если есть ошибка — она сразу вылезет. В математике бездельников нет — все формулы, теоремы, определения работают, а что не работает — отмирает.

Поясню, почему мне смешны раздумья, скажем, над формулой $\sin(\alpha-\beta)=\ldots$ Вот как я действую, если справочник далеко, а память вызывает сомнение. Синус и косинус суммы и разности выражаются через синусы и косинусы слагаемых как суммы или разности попарных произведений — такова простая «мораль» четырех громоздких формул. Пишу первое, что приходит в голову, например: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Но это явная чепуха — при $\alpha=\beta=0$ слева 0, а справа 1. Знак «—» вместо «+» тоже не спасет. Перетасую: $\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$. При $\alpha=\beta=0$ противоречия нет, но и гарантии в знаке «+» нет: $0+0=0-0=0$. Подставлю еще что-нибудь, скажем $\alpha=\beta=45^\circ$: слева 0, а справа нет, значит, знак не «+», а «—». Итак: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$. Разумеется, эту формулу я гораздо чаще помню, чем забываю, но, видимо, потому-то и помню, что не боюсь забыть — у меня всегда есть «аварийный выход».

5. Отношение к информации. Известно, что всю нужную для работы информацию можно условно разделить на две категории: а) которую удобней хранить в памяти; б) которую удобней хранить вне памяти (в тетради или справочнике). Для инженера такое разделение происходит само собой, а для учащихся — это серьезная проблема. В любом потоке информации регулировать степень понимания крайне важно. Учиться этому можно и на простейших бытовых примерах. В ряде ситуаций понимание нам вообще не нужно. Или желательно, но не обязательно. Например, нужно знать, как бросать пятачок в метро, где ближайшая булочная, уметь пользоваться лифтом и т. д.— понимать здесь практически нечего. Примеры второго типа — знание правил хорошего тона и уличного движения, основ физической культуры и рационального питания и т. п.— здесь понимание весьма полезно, но можно без него и обойтись.

6. Умение думать. Это выражение столь емко и многопланово, что ограничусь минимумом. Начну с того, что не у всех учащихся есть даже желание думать. Их можно понять (но не простить!): если из года в год только и делать, что заглатывать знания, которые кладут в рот, то трудно представить себе, что этому вот-вот придет конец — через несколько лет придется работать, и надо думать о будущем, а не о прошлом.

Еще труднее бороться с желанием... думать, когда оно неуместно. В инженерной, да и в любой другой практике часто встречаются ситуации, когда: а) думать стыдно, надо знать; б) думать смешно, надо просто перебрать варианты. Во всех других ситуациях думать можно и нужно, а в этих двух раздумье — признак профессиональной слабости. К сожалению, у нас слишком распространен стереотип «думать всегда хорошо». Для примера попробую пофантазировать. Просыпаюсь утром и думаю — вставать или нет? с какой ноги? идти на работу или нет? бриться или не стоит? какой костюм надевать? брюки на ноги, пиджак на плечи или наоборот? Ну и так далее — все думать, думать...

* * *

К этим шести пунктам можно было бы добавить еще немало — и общих, и узко математических. Но не в количестве дело, важно другое — все эти качества надо воспитывать в школе, в вузе — поздно.

Но вот студент кончает втуз, с дипломом приходит на работу. Идут недели, месяцы, годы. Набивши голову производными, интегралами и еще бог знает чем, бывший студент вдруг замечает, что гораздо нужней совсем другое — аккуратность, серьезность, воспитанность, культура труда, профессиональное самолюбие, умение работать в коллективе, то есть не знания, а качества. Знания, правда, тоже нужны, но часто не те, что приобретены, а, главное, совсем не в том качественном варианте. В школе, в вузе задают стандартные вопросы, требуют стандартные ответы. На работе же такого нет.

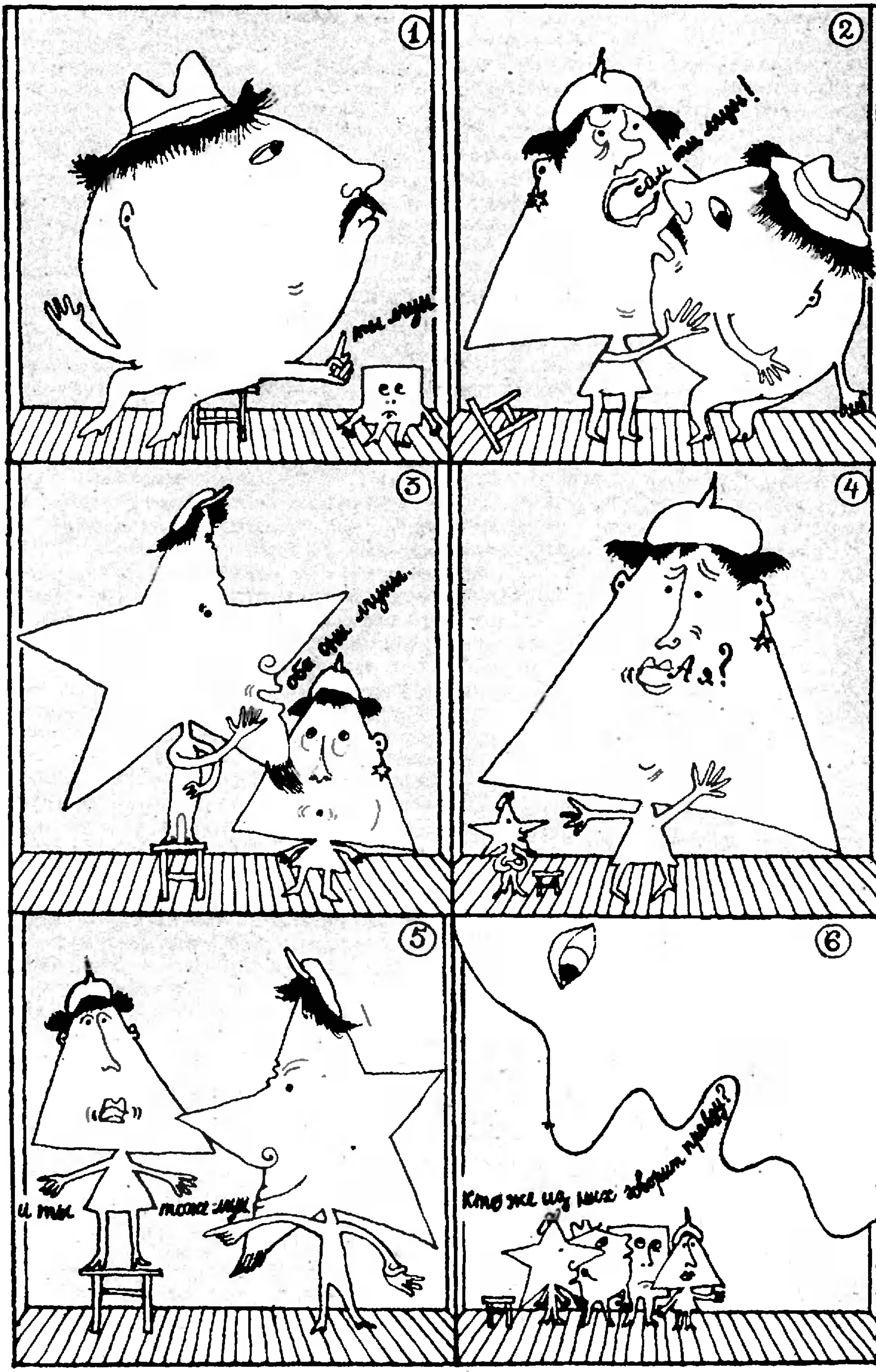
А ведь первый год работы всегда и так очень труден — при любом уровне знаний и качестве подготовки. Происходит неизбежная метаморфоза — ученик превращается в творческого работника, наряду с приобретением новых (как правило, узкоспециальных) знаний вырабатывается новый, профессиональный взгляд на все, даже давно известное (работает классический принцип — движение вперед есть возвращение к первоосновам). Что казалось главным — становится второстепенным, и наоборот. Поясню на примере. В школе проходят много формул. Вот одна из них: $s=at^2/2$. Спросите школьника, чему равен путь, пройденный за время t с ускорением a, он ответит этой формулой. Все верно. Но как смотрит на ту же формулу научный работник? Полушутя-полусерьезно можно сказать, что в каждой формуле важнее всего знак равенства. Он как бы фиксирует, что те или иные величины (путь, время, ускорение) связаны соотношением, и самое важное даже не как они связаны (s пропорционально a и квадрату t, а коэффициент пропорциональности равен 1/2), а сам факт их взаимосвязи. В процессе обучения школьникам и студентам выдаются готовые количественные соотношения. В процессе научного познания прежде всего ищутся и устанавливаются взаимосвязи величин и только после того, как качественный характер явления ясен, наводится, так сказать, количественный глянец.

Мой идеал ученика довольно прост — энергичный, думающий и, главное, умеющий учиться у всех и у всего, что его окружает. Ведь возможности для учения бесконечны. Один из моих идеалов, пожалуй, несколько неожиданный — Чапаев в исполнении Бабочкина. Этой мой дважды идеал — педагога и инженера. Важнейшие вопросы стратегии и тактики он способен объяснить на максимально наглядной модели «картошка», демонстрируя, выражаясь современным языком, силу и формального, и неформального мышления. Все стандартные ситуации у него продуманы и прочувствованы, выработаны алгоритмы поведения. В то же время он психологически готов и к нестандартной ситуации. Вспомним, как великолепен Чапаев-Бабочкин в эпизоде «буза в эскадроне» — узнав о случившемся, он, мгновенно подавляя естественные человеческие эмоции, принимает, пожалуй, единственно верное (на первый взгляд, шальное) решение.

* * *

Инженер будущего мне видится психологически готовым к любой неожиданной ситуации, умеющим в ней сориентироваться, принять разумное решение в условиях неопределенности, а если понадобится, сплотить коллектив и повести его за собой.

Гулливер в стране геометрических фигур подслушал разговор Круга, Квадрата, Звезды и Треугольника. Известно, что каждая геометрическая фигура либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Ответьте на вопрос Гулливера.



Праздник юных математиков

Уже на протяжении 17 лет на время осенних школьных каникул съезжаются в г. Батуми старшеклассники из разных городов Советского Союза. Традиционная программа праздника включает научную конференцию школьников, доклады которых комментируют гости праздника — математики из Москвы и Тбилиси, встречи с редколлегией журнала «Квант», лекции ученых, вечер занимательной математики, конкурс математических газет и самое популярное мероприятие — математический КВН. В прошлом году в XVII празднике, посвященном XXVII съезду КПСС, участвовало около 300 школьников и учащихся СПТУ, а в КВН участвовало 17 команд из Батуми, Тбилиси, Сухуми, Москвы, Ленинграда, Киева, Еревана, Свердловска, Перми и Краснодара. В КВН победила московская ФМШ № 18, опередив свердловчан и батумскую школу № 7.

Много настойчивости, остроумия проявили участники и их педагоги, готовясь к празднику: отыскивали и решали интересные задачи, сочиняли стихи, песни, разучивали танцы, готовили модели, плакаты, стенгазеты, серьезно работали над докладами — их было представлено более 70.

Одним из наиболее интересных был признан доклад Марата Ровинского из с.ш. № 57 г. Москвы «Обобщение понятия производной для нецелых порядков», автор которого самостоятельно нашел оригинальный способ введения «дробных производных», это понятие оказывается полезным в некоторых вопросах анализа; наиболее общепринятым является его введение с помощью некоторых интегральных преобразований, а для М. Ровинского отправной точкой служило определение производной с помощью «конечных разностей». Подробнее об этом рассказано на с. 27. Большой интерес вызвали доклады В. Роганова и В. Каргина (ФМШ № 18 при МГУ) «Итерации дробно-линейных функций и эллиптический биллиард», А. Слепухина и В. Рожкова (ФМШ № 18 при МГУ) «Комбинаторные многогранники со структурой кренделя», С. Пяртли (ФМШ № 18 при МГУ) «Функциональные корни», Г. Михалкина (ФМШ № 30, г. Ленинград) «Классификация кривых третьего порядка элементарными методами», В Судакова (ФМШ им. В. М. Комарова, г. Тбилиси) «Об одной олимпийской задаче», А. Данилова из Ленинградского СПТУ № 8 «Разбиение правильных многоугольников».

Многие научные сообщения были основаны на «задачах для исследования», систематически появляющихся на страницах нашего журнала. Большое количество докладов было посвящено информатике и программированию. Горячим дискуссиям, возникавшим во время этой конференции, мог бы позавидовать любой «взрослый» симпозиум.

Особенно понравилась всем темпераментная дискуссия о методах программирования между гостями праздника — А. Х. Шенем из Института проблем передачи информации и Б. М. Герасимовым из Института прикладной математики АН СССР, предшествовавшая торжественной церемонии закрытия.

Устроителями праздника являются Совпроф Аджарии, Министерство просвещения Аджарской АССР, Аджарская республиканская организация Всесоюзного общества «Знание», Аджарский областной комитет профсоюза работников просвещения, городской отдел народного образования, горком комсомола, физико-математическая школа-интернат № 2 г. Батуми. Бессменный вдохновитель праздника математики — заслуженная учительница Аджарской АССР Медея Илларионовна Жгенти вместе со своими учениками школы № 7 сделала все возможное, чтобы праздник прошел живо и интересно.

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев

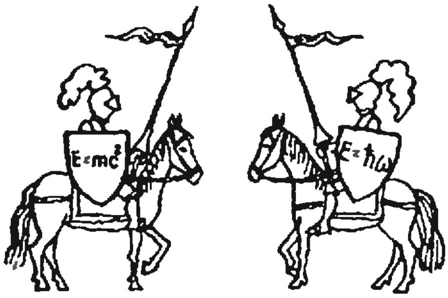
Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для десятиклассников организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 24 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 5 по 21 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Наш адрес: 119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.



VIII Турнир юных физиков

Быть может, эти электроны — миры...
В. Брюсов

Восьмой турнир юных физиков был проведен физическим факультетом МГУ с сентября 1985 г. по февраль 1986 г. Впервые в заочном конкурсе турнира приняли участие не только москвичи, но и школьники из других городов. Победителем заочного конкурса стала команда московской школы № 710. Специальными призами жюри отметило успехи дебютантов турнира — команду школы № 146 г. Харькова и ученика школы № 67 г. Саратова Г. Марченкова.

Первое место и переходящий приз турнира присуждены ФМШ № 18 при МГУ (капитан команды И. Никитин), второе место — командам школы № 679 (М. Смольский) и школы № 47 (М. Кельмансон) г. Москвы, третье место — командам московских школ № 542 при МИФИ (М. Лютиков), № 710 (С. Колосков) и № 82 пос. Черноголовка (А. Гольдшлегер). Победителем конкурса капитанов стал И. Никитин (ФМШ № 18).

Задачи заочного конкурса ТЮФ-VIII были опубликованы в «Кванте» № 8 за 1985 г. Ниже мы публикуем задачи финала ТЮФ-VIII.

Домашние задания финалистам турнира

1. «Скрытый рисунок». Рисунок, выполненный непрерывной полоской листовой меди, вклеен между двумя плотными непрозрачными листами бумаги (почтовыми открытками). Один конец полоски выведен наружу.

Неразрушающими методами определить, что изображено медной полоской.

В последнее время в современной физике одно из рекордных мест по числу ежегодных публикаций занимает проблема исследования вещества и материалов неразрушающими методами. Участники турнира успешно справились с задачей и доказали, что уверенно владеют неразрушающими методами исследования вещества. В общей сложности ими было предложено более 10 различных методов.

В частности, оказалось, что непрозрачные (как это казалось жюри) листы бумаги могут быть вполне прозрачными, если их просветить мощным (1000 Вт) источником света. К нетрадиционным жюри отнесло метод, условно названный «Флюорография». Один из участников турнира прикрепляет исследуемый объект на груди под майкой и идет в кабинет флюорографии. Через неделю его вызывают на повторное обследование, где у обеспокоенного врача он узнает, какое слово нашли у него в легких. Удача обеспечена!

Хорошим оказался метод с использованием электрофорной машины. Электрофорную машину подсоединяем к открытому участку полоски, и вращая рукоятку машины, подаем высокое напряжение на медную полоску. Теперь посыпем пластину мелким порошком диэлектрика — он осядет в местах наибольшей неоднородности электрического поля, т. е. вдоль края медной полоски. Надпись видна!

Следующая задача таила в себе коварную ловушку.

2. «Пьезокерамика». Пьезокерамический образец имеет форму параллелепипеда размером (в мм) $10\times10\times85$. Две его противоположные грани посеребрены.

а) Оцените долю механической энергии, переходящей в электрическую при ударе о его торец стального шарика.

б) Используя свойства пьезокерамического образца, измерьте время соударения стального шарика с его торцом.

С первой половиной задачи все справились достаточно легко. Шарик на нитке (маятник) ударял по торцу образца, подключенного к конденсатору, определялись масса стального шарика, начальная высота H, емкость конденсатора C и максимальное напряжение на конденсаторе. Коэффициент преобразования механической энергии в электрическую равен $E_{эл}/E_{мех}$.

Решая вторую половину задачи, все попали впросак. Время соударения приравнивали длительности первого импульса напряжения на пластинах конденсатора, найденной по визуальным наблюдениям на экране осциллографа. Это неверно, так как при ударе стального шарика об образец из пьезокерамики в последнем возникают механические колебания на резонансной частоте $\nu=v/2l$, где l — длина образца, а v — скорость звука в пьезокерамике. Определенная таким образом длительность первого импульса (10^{-5} с) равна полупериоду механических колебаний и оказывается примерно на порядок больше времени соударения.

Для оценки времени соударения можно было бы собрать иную установку, в которой шарик подвешивался на проволочке, а заряженный конденсатор разряжался только в момент механического контакта шарика и посеребренной грани образца. Измеряя баллистическим гальванометром остаточный заряд на конденсаторе, можно вычислить время соударения. Попробуйте!

Предлагаем вам для самостоятельного исследования три другие задачи домашнего задания финалистам ТЮФ-VIII.

3. «Зеркало». На поверхность медного зеркала напылен слой алюминия. Напыление проводилось в вакууме (10^{-5} мм рт. ст.). Объясните, почему на границе напыления алюминия на зеркальную поверхность меди наблюдается темная полоса.

4. «Разведчик». В середине маленького острова установлен прожектор, луч которого вращается в горизонтальной плоскости с частотой 1 об/мин. Охрана острова обнаруживает все объекты, попавшие в луч прожектора на расстоянии от 20 м до 1 км от центра острова. Вам необходимо достичь острова необнаруженным. В вашем распоряжении катер, развивающий скорость 50 км/ч.

а) Считая скорость катера постоянной, найдите траекторию движения, при которой катер достигает острова необнаруженным.

б) При какой минимальной скорости катера это возможно?

5. **«Тяготение».** Некий объект, условно названный астероидом, состоит из вещества постоянной плотности ϱ.

а) При какой минимальной массе астероида ускорение свободного падения (напряженность гравитационного поля) вблизи него хотя бы в одной точке равно g?

б) Найдите такую форму астероида, при которой созданное им гравитационное поле будет однородным (с напряженностью g) в конечном физическом объеме V. Постарайтесь, как и в случае а), подобрать такую форму астероида, при которой его масса минимальна.

Конкурс капитанов и болельщиков

В честь закрытия турнира в большой аудитории физического факультета МГУ был произведен запуск воздушного шара системы братьев Монгольфье. Воздушный шар объемом примерно в 1,5 м^3 был склеен из кальки. Подъемная сила создавалась воздухом, нагретым с помощью газовой горелки с открытым пламенем. (Участников запуска подстерегали те же опасности, что и братьев Монгольфье, поэтому на всякий случай поблизости находились дежурные с ведрами воды. Но все прошло успешно, и шар к восторгу всех присутствующих поднялся к потолку аудитории.)

Запуск шара позволил сформулировать первую задачу конкурса капитанов и болельщиков.

1. **«Шар».** Оцените массу оболочки шара системы братьев Монгольфье.

Прикинув объем шара и температуру горячего воздуха, капитаны быстро рассчитали: масса оболочки 150—300 г. Гость турнира — учащийся из полиграфического СПТУ № 4 А. Кандауров — удивил жюри своим необычным решением. Для вычисления массы достаточно оценить площадь оболочки шара и умножить ее на массу 1 кв. м. кальки. Ну а здесь ему помогло хорошее знакомство с секретами профессии: каждый сорт кальки в соответствии со стандартом имеет строго определенную массу. В результате ответ готов — 260 г. Контрольное взвешивание на весах показало, что масса бумажной оболочки — 270 г.

Ниже мы приводим условия остальных семи задач. Попробуйте свои силы, и вы узнаете, можете ли вы быть капитаном (на выполнение каждой задачи капитанам выделялось по 5 минут).

2. **«Трехпрограммный репродуктор»** (предложена командой школы № 52). Почему при плохом контакте резко ухудшается слышимость I программы и практически не изменяется слышимость III программы?

3. **«Термометр»** (школа № 91, задача признана лучшей). Если достаточно долго дышать на обернутый шерстью медицинский термометр, то он покажет температуру выше «нормальной». Почему?

4. **«Мяч»** (школа № 43). Объясните поведение волейбольного мяча при «крученом» ударе.

5. **«Скрипка и гитара»** (школа № 179). Почему маленькая скрипка звучит громче большой гитары?

6. **«Лазерная пушка».** Луч лабораторного импульсного лазера сбивает бумажную мишень. Почему? (На финале турнира демонстрировался CO_2 — лазер, в качестве мишени — полоска черной бумаги).

7. **«Водяной молоток».** Объяснить действие водяного молотка.

Для изготовления водяного молотка можно взять химическую пробирку с хорошо подогнанной резиновой пробкой. Заполнить пробирку доверху водой, лучше дистиллированной, но не закрывать пробирку. Нагреть воду до 100 °С и кипятить далее на медленном огне до тех пор, пока жидкость не начнет «взрываться» с образованием больших пузырей — вода перегрета. В момент образования большого пузыря быстро закрыть пробирку пробкой. Остудить пробирку с водой, водяной молоток готов. При резком встряхивании водяного молотка слышен характерный металлический звук.

При опытах соблюдайте осторожность, так как при резком ударе стекло может разлететься на мелкие осколки.

8. **«Атом Бора».** Оценить размер возбужденного атома водорода при значении главного квантового числа $n=650$.

Для атома водорода в состоянии с $n=650$ радиус орбиты равен $r_n=r_1\cdot n^2$, где

$$r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{me^2}=5\cdot 10^{-11}\text{ м}$$

— радиус первой боровской орбиты. Диаметр такого атома водорода 45 мкм. Это вполне макроскопическая величина, она даже несколько больше толщины пленки в кассетном магнитофоне. Не менее непривычными являются и другие характеристики такого атома. Частота обращения электрона по орбите (или, что то же самое, частота кванта, излучаемого при переходе на уровень с меньшим на единицу квантовым числом) лежит в радиодиапазоне коротких волн (резонансная длина волны $\lambda=12{,}5$ м), характерное время жизни атома в таком состоянии (до излучения кванта) равно 2 часам. Чтобы ионизировать такой атом постоянным электрическим полем, достаточно взять поле с напряженностью 3 В/м. Таким образом, название «атом» (от греческого ατομος — неделимый) приложимо к такому атому только в ироническом смысле (для сравнения — напряженность электрического поля Земли 100 В/м).

Наконец, при рассеянии на таком атоме радиоволны с резонансной длиной волны он ведет себя аналогично непрозрачному телу с площадью поперечного сечения 75 м^2. Значение $n=650$ взято не случайно. Недавно советскими физиками при помощи чувствительного радиотелескопа было обнаружено космическое радиоизлучение, соответствующее переходу электрона в атоме водорода с уровня 650 на уровень 649. Это указывает на то, что такие атомы действительно существуют в космическом пространстве.

В последние годы интерес к атомам в сильно возбужденных состояниях (их называют ридберговскими) сильно возрос, так как появилась техническая возможность получения пучков атомов, находящихся в возбужденном состоянии с определенным и большим ($\approx$40—60) главным квантовым числом. Наибольший интерес к таким атомам проявляет квантовая радиофизика из-за их сильной связи с электромагнитным полем резонансной частоты. Использование пучков ридберговских атомов позволило проверить ряд предсказаний квантовой электродинамики, недоступных проверке при использовании обычных (маленьких) атомов. В частности, удалось построить квантовый генератор, в котором когерентное поле создавалось атомами, поодиночке пролетавшими через резонатор.

IX Турнир юных физиков

Этот турнир начинается в сентябре 1986 г. Он будет проводиться в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. Решения задач ТЮФ-IX, опубликованных ниже, можно отправлять не позднее 20 ноября 1986 года по адресу: 119899 Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, оргкомитет ТЮФ-IX. В графе «Кому» напишите: «Заочный конкурс ТЮФ-IX» и номера задач, решения которых вы посылаете. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом школы (в этом конверте будут отправлены результаты проверки решений), а также список членов команды, фамилию учителя физики, номер школы, класс. Решения могут быть индивидуальными и коллективными. Каждое решение пишите отдельно и вначале обязательно укажите город, номер школы, класс, фамилии и имена авторов решения. К решениям экспериментальных задач должны быть приложены подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения задач и самостоятельно сформулированных проблем будут отмечены грамотами турнира и представлены к печати в «Кванте».

II тур — отборочные физбои. В нем могут принять участие команды школ г. Москвы и Московской области, набравшие в заочном коллективном конкурсе более 40 баллов (из 50 возможных). Отборочные физбои 1/4 и 1/2 финала будут проводиться с 10 декабря 1986 г. по 10 января 1987 г. на физическом факультете МГУ по задачам коллективного конкурса. (Другим городам могут быть высланы материалы для организации II и III туров на местах).

III тур — финал турнира — состоится 22 февраля 1987 г. на физическом факультете МГУ. В его программу входят: физбой финалистов турнира, конкурс капитанов, конкурс болельщиков, награждение победителей и активных участников турнира.

В составлении заданий для финальных конкурсов турнира могут принять участие все желающие. Условия задач высылайте не позднее 20 января 1987 года. Получить дополнительные сведения о правилах проведения ТЮФ-IX, а также высказать свои предположения и замечания можно по вышеуказанному адресу.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-IX

Большинство заданий сформулировано на основе конкретных физических явлений и рассчитано на проведение серьезных теоретических и экспериментальных исследований, выходящих за рамки «школьного» подхода. Условия задач сформулированы максимально кратко и допускают различные трактовки и степени упрощения.

1. **«Придумай сам».** Самостоятельно сформулируйте задачу-проблему и решите ее.

2. **«Электрон».** Опишите известные современной науке свойства электрона.

Выполнение этой работы предполагает составление реферативного обзора, в котором следует изложить только свойства электрона как элементарной частицы, не рассматривая поведение большого числа электронов в сложных системах.

3. **«Тормозной путь».** Тормозной путь автомобиля примерно 40 м, а железнодорожного состава — 1500 м. Почему такая большая разница?

4. **«Лунная дорожка».**

«Выхожу один я на дорогу,
Сквозь туман кремнистый путь блестит.
Ночь тиха...»

М. Ю. Лермонтов

Какое физическое явление описал поэт? Объясните, каким образом возникает «лунная дорожка». Рассчитайте пространственное распределение интенсивности отраженного света, видимого наблюдателем в этих случаях.

5. **«Маневр».** Самолет летит со скоростью v над прямолинейным участком шоссе. Через какое минимальное время он может удалиться от шоссе на расстояние S? Считать, что полное ускорение самолета не превышает величины a и высота полета постоянна.

6. **«Термометр».** Измерения температуры удобно производить с помощью термопары. Определите, за какое минимальное время с ее помощью можно с наперед заданной точностью измерить температуру термостата?

7. **«Лампа накаливания».** Лампа накаливания включена в сеть:

а) постоянного тока;

б) переменного тока с частотой 50 Гц.

Исследуйте зависимость тока в цепи от падения напряжения на лампе. Оцените амплитуду колебаний температуры спирали лампы накаливания, включенной в сеть переменного тока с частотой 50 Гц.

8. **«Границы применимости».** Опишите границы применимости:

а) III закона Ньютона;

б) закона Кулона.

9. **«Электричка».** Какое напряжение и почему применяют в электротяге трамвая, троллейбуса, электропоездов железной дороги и метро?

10. **«Сквозняк».** Объясните, почему бывают сквозняки?

11. **«Ниточный телефон».** Из двух спичечных коробков и катушки ниток можно сделать... телефон. Всесторонне исследуйте принцип действия и свойства такого телефона.

12. **«КПД трансформатора».** Исследуйте зависимость коэффициента полезного действия школьного понижающего трансформатора от нагрузки.

13. **«Неоновая лампочка».** Почему загорается неоновая лампочка? Другими словами, откуда берутся свободные электроны в инертном газе (неоне), необходимые для ее загорания?

14. **«Фокусное расстояние».** Предложите подтвержденные вашими экспериментами способы измерения малого (<1 см) и большого (>10 м) фокусного расстояния линзы.

15. **«Энергопотребление».** Оцените полное энергопотребление средней городской квартиры. Обоснуйте физические принципы экономного расходования энергии.

16. **«Сахарница».** Вы насыпали в сахарницу кусковой сахар, заполнив ее до краев. Если теперь потрясти сахарницу, то можно будет добавить несколько кусочков сахара. То же самое произойдет и при насыпании сахарного песка или какой-нибудь крупы. Исследуйте явление «утряски».

17. **«Теплый свитер».** Вязаный шерстяной свитер очень хорошо греет, хотя, честно говоря, он ведь «дырявый» (имеет множество сквозных отверстий). Если уменьшить плотность вязки (повысить степень «дырявости»), то все равно свитер будет теплым. При какой максимальной степени «дырявости» свитер еще греет? (Традиционно задача № 17 имеет шуточный оттенок.)

Публикацию подготовили *Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

Ответы, указания, решения

Как Декарт проводил касательные

Уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в точке $(x_0;\ y_0)$ имеет вид $yy_0=p(x+x_0)$.

Малярный парадокс

Количество краски, необходимое для закрашивания поверхности, будет пропорционально площади этой поверхности, если толщина слоя краски всюду одинакова. При способе же окраски, описанном в пункте 2, толщина слоя краски на n-м прямоугольнике не превосходит ширины этого прямоугольника, то есть $1/2^n$ см.

Секрет Старого Бондаря

Найдем, при каких значениях переменных y и z емкость бочки v (см. формулу (6, с. 17) будет — при заданном λ — наибольшей. Для этой цели воспользуемся следующим фактом.

Лемма. Пусть функция $F(y,\ z)$ при каждом фиксированном (постоянном) z имеет — при любом y — производную по переменному y (обозначим ее так: F'_y), а при каждом фиксированном y — производную по переменному z при любом z (обозначим ее так: F'_z). Если при $y=y_0$ и $z=z_0$ функция $F(y,z)$ имеет свое наибольшее значение, то при $y=y_0$ и $z=z_0$ обязаны выполняться равенства

$$F'_y(y,z)=0 \text{ и } F'_z(y,z)=0. \qquad (*)$$

Доказательство. В самом деле, если $F(y_0,z_0)\geqslant F(y,z)$ для всех y и z, то, в частности, должно выполняться и неравенство $F(y_0,z_0)\geqslant F(y,z_0)$ при любых y; это означает, что функция *одного* переменного $F(y,z_0)$ имеет при $y=y_0$ максимум; значит, ее производная (по y) $F'_y(y,z)$ обязана обращаться в нуль при $z=z_0$. Аналогично убеждаемся, что $F'_z(y_0,z)$ обращается в нуль при $z=z_0$. А это как раз и означает, что в точке (y_0,z_0) выполняются равенства (*).

Пользуясь этой леммой, найдем максимум функции v (см. (6)). Чтобы не иметь дело с корнями, будем искать максимум функции v^2 (ведь v и v^2 достигают своего максимума одновременно, при одних и тех же значениях переменных y и z). Имеем (см. (6))

$$F(y,z)=\frac{4}{9}\pi^2(y^2+z^2-yz)^2(\lambda^2-z^2).$$

Для нахождения точки максимума, найдем, согласно лемме, F'_y и F'_z и приравняем их нулю.

$$F'_y=\frac{8}{9}\pi^2(y^2+z^2-yz)(2y-z)(\lambda^2-z^2)=0,$$

$$F'_z=\frac{4}{9}\pi^2(y^2+z^2-yz)[2(2z-y)(\lambda^2-z^2)+$$
$$+(y^2+z^2-yz)(-2z)]=0 \qquad (**)$$

Учитывая, что $0<z<\lambda$, получаем $z=2y$. Так как (рис. 3, с. 16) $K=2(z-y)$, заключаем, что $NK=2y=AD$, то есть «наилучшая» бочка должна иметь форму цилиндра. Полагая в (**) $z=2y$, получим

$$8\pi^2y^3(\lambda^2-6y^2)=0,$$

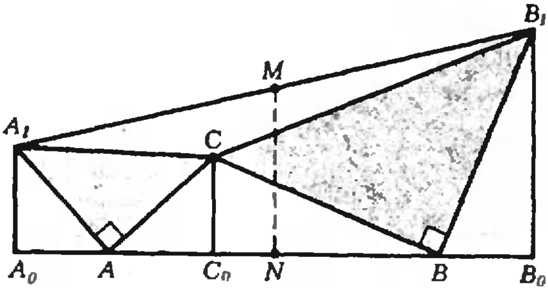
откуда $y=\lambda/\sqrt{6}$, $z=2\lambda/\sqrt{6}$ Если $DF=x$, то

$$x^2=\lambda^2-z^2,\ x=\lambda/\sqrt{3}=y\sqrt{2}.$$

Видим, что v может принимать наибольшее значение лишь в одном случае: $y=\lambda/\sqrt{6}$, $z=2\lambda/\sqrt{6}$.

Неудача одной цивилизации

Пусть C — произвольная точка в плоскости, ACA_1 и BCB_1 — равнобедренные прямоугольные треугольники, расположенные вне треугольника ABC (прямые углы — при вершинах A и B). Покажем, что точка M — середина отрезка A_1B_1 — не зависит от выбора точки C. Пусть A_0, B_0, C_0 — ортогональные проекции точек A_1, B_1 и C на прямую AB (см. рисунок). Легко видеть, что треугольники AA_0A_1 и CC_0A, а также BB_0B_1 и CC_0B равны; поэтому $AA_0=BB_0=CC_0$. Пусть N — середина отрезка A_0B_0. Ясно, что N является также серединой отрезка AB. Тогда MN — средняя линия прямоугольной трапеции $A_0B_0B_1A_1$; следовательно, $MN\perp AB$, $MN=\frac{1}{2}(A_0A_1+B_0B_1)$. Но $A_0A_1=AC_0$, $B_0B_1=BC_0$. Подставляя эти равенства, в выражение для MN, получаем $MN=\frac{1}{2}(AC_0+BC_0)=\frac{1}{2}AB$. Следовательно, при произвольном выборе точки C (в одной полуплоскости) отрезок MN перпендикулярен AB и равняется $\frac{1}{2}AB$, где N — середина AB. Это означает, что при движении точки C точка M остается неподвижной. Отметим, кроме того, что треугольник ABM — равнобедренный и прямоугольный.



«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Выразим x через y: $x=\dfrac{5y-3}{y+3}$ $(y\neq-3)$, или $x=5-\dfrac{18}{y+3}$. Поэтому x будет целым числом тогда и только тогда, когда 18 делится на $y+3$. Для $y+3$ получаем двенадцать возможных значений: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, что дает двенадцать целочисленных решений уравнения

$\{(-13; -2), (23; -4), (-4; -1), (14; -5), (-1; 0), (11; -6), (2; 3), (8; -9), (3; 6), (7; -12), (4; 15), (6; -21)\}$.

2. Возьмем правильный пятиугольник, вписанный в нашу «раскрашенную» окружность. Легко понять, что у него всегда найдутся три вершины одного цвета. Эти вершины в любом случае образуют нужный равнобедренный треугольник.

3. Пусть $A=\overline{ab}$. Тогда $(a+b)+(a+b)^2=10a+b$, то есть $(a+b)^2=9a$ откуда следует, что a — точный квадрат. Поскольку $1\leqslant a\leqslant9$, получаем три возможности: $a=1$, $a=4$ и $a=9$. Поэтому число A равно 12, 42 или 90.

4. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Из условия $\angle CAB+\angle MCB=90°$ следует, что медиана CM принадлежит диаметру этой окружности (сделайте чертеж). Если при этом сторона AB не является диаметром, то медиана CM перпендикулярна AB как диаметр, проходящий через середину хорды, и треугольник ABC — равнобедренный (поскольку медиана CM является и высотой). Если же сторона AB является диаметром, то треугольник ABC — прямоугольный.

5. Отразим наши дуги симметрично относительно диаметра d, перпендикулярного выбранной прямой. Вместе с первоначальными дугами они образуют систему дуг длины 64, большей чем длина 20π нашей окружности. Поэтому в этой системе дуг найдутся по крайней мере две пересекающиеся дуги. Соединив любую точку из пересечения таких двух дуг с точкой, симметричной относительно диаметра d, мы получим нужную хорду, параллельную выбранной прямой.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 5)

Задание 9 (Я. Хартонг, 1957 г.). Задача на перекрытие — одну из самых популярных геометрических тем в шахматной композиции. После **1.Kb5!** с угрозой 2.Фd4× возникают сразу семь перекрытий: 1...Cf6 2.Фh7× (перекрыта пешка f7); 1...f6 2.Фe7× (теперь пешка перекрыла дорогу слону к полю e7); 1...Cf2 2.Лf4×; 1...Ke2 2.Лe3×; 1...Kb3 2.К:c3×; 1...Kc6 2.Cd5×; 1...c5 2.К:d6×.

Задание 10 (Л. Куббель, 1907 г.). **1.Kc3+ Крc2 2.Kd1!** Проигрывает 2.Kd5? из-за 2...Крd2! 2...Кр:d1 **3.Крh8! f1Ф** (3...Крe1 4.Лg2 с тем же итогом) **4.Лg1! Ф:g1. Пат.**

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

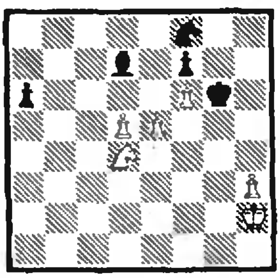
Сдано в набор 19.6.86. Подписано к печати 17.7.86
Т-16726 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,95
Тираж 194 920 экз.
Цена 40 коп. Заказ 1646

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГЕОМЕТРИЯ ШАХМАТНОЙ ДОСКИ

Мы уже не раз отмечали необычное свойство «шахматных расстояний»: кратчайший путь между двумя полями проходит не обязательно по прямой линии. Остановимся на двух любопытных эпизодах из практики. Первый случай произошел в 1914 году в сеансе, который будущий чемпион мира А. Алехин давал членам Московского шахматного кружка.



А. Алехин — В. Нейштадт

В этой позиции в ответ на прыжок коня Kh7—f8 Алехин моментально ответил **1.e6**. Его партнер собрался взять пешку пешкой, но, когда гроссмейстер вернулся к столику, растерялся и побил ее конем **1...K:e6 2.K:e6**.

«Чем брать? — подумал Нейштадт,— наверное, пешкой». Но сеансер снова подошел к столику, и черные машинально взялись за слона. Алехин любезно предложил поменять ход, но соперник гордо отказался.

Жаль,— загадочно произнес гроссмейстер и опрокинул своего короля. Нейштадт никак не мог понять, о чем пожалел сеансер, и после сеанса робко попросил его раскрыть секрет.

— С удовольствием,— воскликнул Алехин, и на доске вновь были расставлены фигуры.— В этой безрадостной для меня позиции, сыграв 1.e6, я рассчитывал, что вы или сразу возьмете на e6 пешкой или после случившегося в партии 1...K:e6 2.K:e6 fe 3.de C:e6.

— Сейчас, глядя на позицию, я вижу, что брать пешкой было еще сильнее, ведь ваш король не успевает попасть в квадрат моей крайней пешки.

— Вы так полагаете? — усмехнулся Алехин и переставил своего короля — 4.Kpg3. Тут же были сделаны еще два хода — 4...a5 5.Kpf4 a4 6.Kpe5! и двигаться черной пешке вперед бесполезно — 6...a3 7.Kp:e6 a2 8.f7 с ничьей. Слон отступил по диагонали a2—g8 и после 7.Kpd4 a3 8. Kpc3 a2 9. Kpb2 на доске теоретическая ничья. Так за семь лет до Рети Алехин применил на практике его замечательный маневр. Правда, стремительно передвигаясь по кругу, он успел обнаружить не только остроумную геометрическую идею, но и ... ее опровержение: 4. Kpg3 Kp:f6 5. Kpf4 Cf5! 6. Kpe3 Kpe5 7. Kpd2 Kpd4 8. Kpc1 Kpc3, и дальнейший путь белому королю в угол прикрыт.

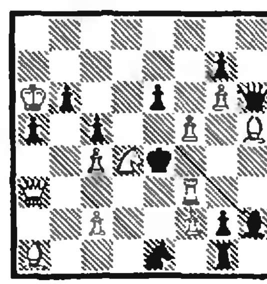
Д. Бронштейн — М. Ботвинник

В этой позиции из шестой партии матча на первенство мира 1951 года легко делало ничью 57.Ke6+ и 58.Kd4. Но Бронштейн решил подойти королем к пешке, возможно, со смутной надеждой на победу, и сыграл **57. Kpc2**. Конечно, гроссмейстер понимал, что черный король в состоянии появиться на поле f2, но, наверное, рассматривал лишь прямолинейный маршрут Kpf4—f3—f2, полагая, что и тогда успеет подтянуть коня — Ke6 и Kd4+. Неприятельский король действительно отправился к полю f2, но не по прямому пути, а по зигзагу! После **57...Kpg3!!** белые сразу сдались, так как пешка «e» неудержима: 58. Ke6 e2, и белый конь попадает на d4 без шаха (59. Kpd2 Kpf2!).

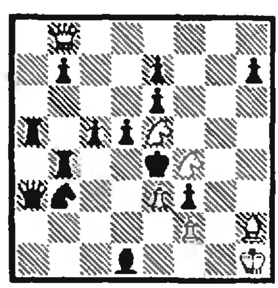
Впервые описав этот случай в рассказе о геометрии шахматной доски, ведущий «странички» был очень доволен, обнаружив такой удачный геометрический сюжет в поединке выдающихся гроссмейстеров. Позже я узнал, что достаточно было и простого Kpf4—f3. Как пишет Б. Вайнштейн в книге «Импровизация в шахматном искусстве» (1976 г.), посвященной творчеству Бронштейна, 57...Kpf3 выигрывало в несколько ходов: 58. Ke6 e2 59. Kd4+ Kpf2 60. K:e2 Kp:e2, и пешечное окончание безнадежно для белых: 61. Kpb3 (61. c5 a4!) 61...b6! 62. Kpa4 Kpd3 63. Kpb5 a4! 64. Kp:a4 Kp:c4 и т. д.

Прошло несколько лет, и вот, раскрыв вышедшую в 1985 году книгу М. Ботвинника «Аналитические и критические работы, 1942—1956» на странице, где описывается эта партия, я обнаружил ремарку экс-чемпиона, внесенную им в новый комментарий. Оказывается все-таки, что именно хитрый маневр Kpf4—g3—f2 обеспечивал черным победу — белому коню вовсе не обязательно шаховать с поля d4, выручает другая траектория: 57...Kpf3 58.Kf7! e2 59.Ke5+ Kpf2 60.Kd3+ Kpf1 61.Kpb3, и белые добиваются ничьей! В пешечном окончании — 61...e1Ф 62.K:e1 Kp:e1 черный король по сравнению со «старым анализом» находится чуть дальше — на e1, и это меняет оценку позиции.

Конкурсные задания



15. Белые начинают и дают мат в 4 хода.



16. Белые начинают и дают мат в 4 хода.

Срок отправки решений — 20 октября 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Новости космической филателии

В марте 1986 года успешно завершился международный многоцелевой космический эксперимент «Венера — комета Галлея». В ходе эксперимента удалось получить более тысячи снимков кометы и богатую информацию о ее газопылевой оболочке. Эти данные существенно обогатили наши представления о природе комет и кометных хвостов. Они представляют огромную ценность для науки.

Выдающаяся международная научная программа исследований кометы Галлея нашла свое отражение в филателии. Ей посвящены две почтовые марки и почтовый блок, выпущенные в нашей стране в 1985—1986 годах. Аналогичные почтовые знаки появились и в ряде других стран. Мы воспроизводим здесь серию вьетнамских марок, на которых изображены комета и старт автоматической станции «Вега», а также портреты Ньютона и Галлея, и почтовый блок КНДР.

В. Рудов